1. 目的

減衰を持つ一自由度の機械振動系に正弦波状の周期的外力を加えた場合の応答の様子 (周波数応答特性, 共振特性) を実験的の求める. また, 理論解の導出について理解し, 実験系の理論応答を計算し, 実験結果と比較考察する.

2. 理論

1) まず図 1′ に示すばねで支持されたおもりの運動を考察する. ばねにおもりを吊るし静的につりあった位置からおもりを x だけ変位させたとすれば, おもりに作用する力はばねの復元力 $(-kx)$ だけであるのでニュートンの第 2 法則からおもりの運動を記述する次の運動方程式を得る.

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{すなわち,} \tag{1}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2}$$

ここで, $m(= w/g)$ はおもりの質量, w はおもりの重さ (重量), g は重力加速度, k はばね定数である.

この微分方程式を解くと, 初期条件が $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ の時, すなわち, 時間 $t = 0$ でおもりを静かに x_0 だけ変位させて離した時には, 次の解が得られる.

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t \tag{3}$$

すなわち, おもりは振動数 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ の正弦波状の振動を持続する (振幅が時間の関数でないので, 減衰することも発振——振幅が増大——することもない). このような振動を固有振動と呼ぶ. また, ω_n は固有振動数とも呼ばれ, 振動系にとって重要なパラメーターの 1 つである. ω_n を用いると運動方程式 (2) は次のようになる.

$$\ddot{x} + {\omega_n}^2 x = 0 \tag{4}$$

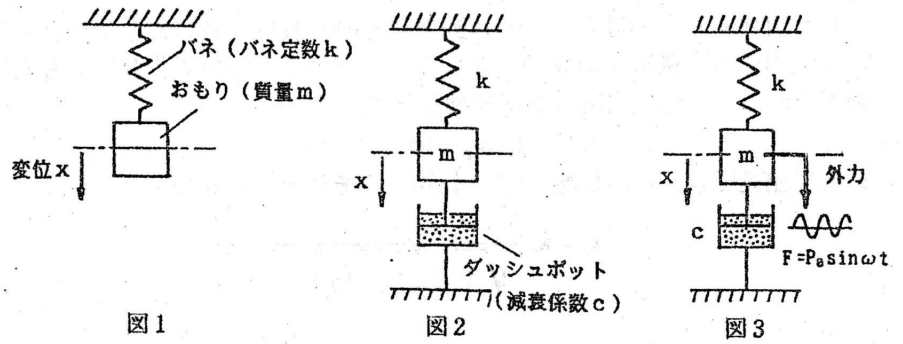

図 1　図 2　図 3

2) 次に図 2′ に示す系のおもりの運動を考察する. この系ではおもりはばねだけでなく, 粘性減衰器 (ダッシュポット) でも支持されている. 粘性減衰器の粘性減衰係数を C とすれば, おもりが静的釣り合い位置から x 変位した時, これがおもりに作用する力 (粘性抵抗力) は $(-C\dot{x})$ であるのでこの場合の運動方程式は次のようになる.

$$m\ddot{x} = -kx - C\dot{x} \quad \text{すなわち}$$

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = 0 \tag{5}$$

また, この方程式は上記の ω_n や減衰比 γ $(= C/C_c,$ ただし $C_c = 2\sqrt{mk}$: 臨海減衰係数と呼ぶ) を用いて次のようにもかける. γ も振動系の重要なパラメーターの 1 つである.

$$\ddot{x} + 2\gamma\omega_n\dot{x} + {\omega_n}^2 x = 0 \tag{6}$$

初期条件 $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0$ の下でこの微分方程式をとくと, $\gamma < 1$ (不足減衰) の場合には次の解が得られる.

$$x(t) = e^{-\gamma\omega_n t}\frac{v_0}{q}\sin(qt) \tag{7}$$

すなわち, おもりは振動数 q $(= \omega_n\sqrt{1-\gamma^2})$ の正弦波状振動を行うが振幅は時間とともに減少してつく. このような振動を自由減衰振動と呼ぶ. 一方, $\gamma > 1$(過減衰) の場合には振動は正弦波状とはならず非周期運動を行うようになる. 減衰振動となるか, 非周期運動となるかの境界が $\gamma = 1$ の状態であり, これを臨界減衰と呼ぶ (この時の振動は非周期運動となる).

3) また, 図 $2'$ の系で更におもりに周期的な強制外力 F $(P_0 \sin\omega t)$ が作用する場合の運動 (図 $3'$) を考察すると, 運動方程式は次のようになる.

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = F = P_0 \sin\omega t \tag{8}$$

$$\text{あるいは}\quad \ddot{x} + 2\gamma\omega_n\dot{x} + {\omega_n}^2 x = \frac{P_0}{m}\sin\omega t = x_{st}{\omega_n}^2\sin\omega t \tag{9}$$

$$\text{ただし}\quad x_{st} = \frac{P_0}{k} : \text{静的変位}$$

2) と同様 $\gamma < 1$ の場合, この運動方程式の一般解は時間とともに減衰する項と一定振幅の振動項 (定常項) からなり, 充分時間が経過すればすれば後者だけが観測される. この定常解 (強制振動と呼ぶ) は,

$$x(t) = x_a \sin(\omega t - \phi) \tag{10}$$

の形で記述でき, その振幅 x_a と位相 ϕ はそれぞれ次式のようになる.

$$x_a = x_{st}\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\gamma^2\lambda^2}} \tag{11}$$

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\lambda}{1-\lambda^2},\ \text{ただし}\ \lambda = \frac{\omega}{\omega_n} : \text{振動数比} \tag{12}$$

この結果は振動系に正弦波状強制外力が作用した時, 系が定常状態でどのように応答するかを記述している.

図 4 は (11), (12) に基づいて強制振動 ω に伴う強制振動振幅や位相の変化を図示したもの (共振曲線, 周波数応答曲線などと呼ばれる) で系の動特性を知るのに重要な手がかりになる. 図 $4'$ 左側は系の固有振動数に対する強制振動数の比 (振動数比) によって定常振動となった際の振幅が静的変位量 x_{st} に対してどのような比率となるかを示している. $\lambda = 1$ かつ $\gamma = 0$ (強制振動数が固有振動数と一致し, かつ振動の減衰が皆無) の時では定常振動の振幅は無限大となる. また, $\gamma \neq 0$ であっても $\gamma \ll 1$ の場合には鋭いピークが現われ, $\lambda = 1$ 付近 (ただし $\lambda < 1$) で極めて振幅が大きくなることがわかる. 構造物がこの状態にあると大振動により破壊に至ることもある. これが共振と呼ばれる現象である. ただし, 図からもわかるように γ の値を大きくしていくと $\lambda = 1$ であっても定常振動の振幅を静的変位量より抑えること可能であり, 振動や騒音の対策上重要な点である. 一方, 図 $4'$ 右側は振動数比によって系の定常振動が強制振動に対してどれだけ遅れるかを位相差で表わしたものである. γ の値に関係なく $\lambda = 1$ の時には $90°$ の位相遅れとなることがわかる.

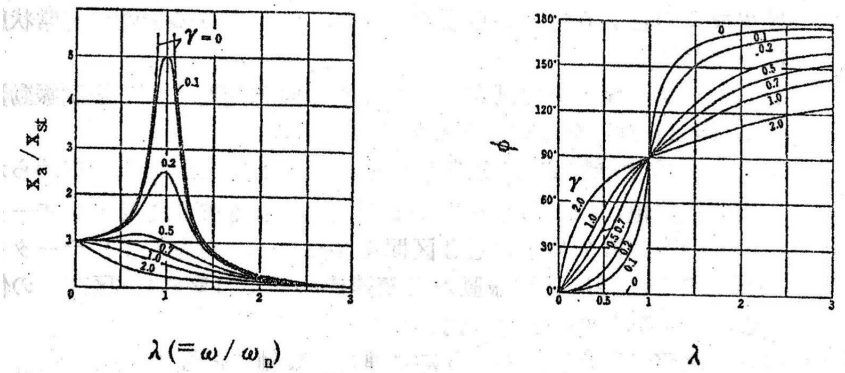

図 4

3. 実験方法

(1) 強制振動の実験

(a) 図 2′ の系にばねを介して加振用のクランク機構を付加し, 図 5′ に示す強制振動系を構成する (ダッシュポット下にばねを接続するが, 正弦波状変位を伝達するテグスが途中で絡んでいないか確認すること).

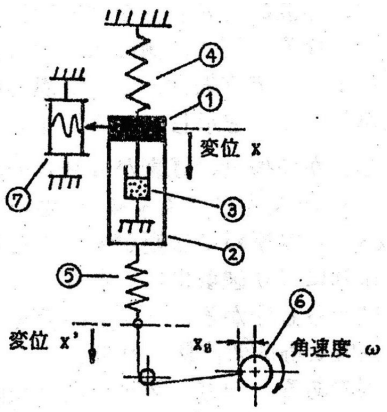

図 5

(b) モータを回転させておもりに強制外力 $P_0 \sin \omega t$ を作用させてこの系の共振抑制 (周波数特性) 調べる. モータの回転数を回転数調整つまみの目盛り 0 付近から順次変化させ, おもりの振動が定常状態になった後,

i. ストップウォッチで測定したモータの回転周期 T から強制振動数 ω $(2\pi/T)$ を算定するとともに,

ii. おもりの全振幅 $2x_a$ を波形記憶ドラム上に記録する. 滑らかな共振曲線が描けるようできるだけ多く ω を変化させて (モータ上の変速機の最小目盛り 3 区間を 20 点以上に分割して) データを得ること. 特に強制振動数 (変速機の最小目盛り約 1.5 区間) の付近では ω をきめ細かく変化させる.

(c) 得られたデータを表 1 のように整理し, 縦軸に振幅比 x_a/x_{st}, 横軸に振動数比 λ $(= \omega/\omega_n)$ をとって実験共振曲線を描け (ω_n, x_{st} については後述する (18), (19) 式により求められる).

(d) また後述する 2, 3 の実験で求める k_1, k_2, γ および実験系の諸元 (m, x_0) を用いて (11) 式を数値計算して理論値共振曲線を描き, 実験曲線と比較検討せよ.

(2) 自由減衰振動の実験

(a) 図 2′ に示すようにばねとおもりとダッシュポットを用いて自由減衰振動系を構成する (その際, ダッシュポット下のばねは外しておく).

(b) おもりに初期変位を与えて静かに離すとおもりは自由減衰振動を行う (その際, おもりを鉛直に落下させないとダッシュポット側壁の摩擦によって振幅が減少するので注意すること).

(c) この減衰振動波形をおもりに取り付けた記録ペンで波形記録ドラム上に記録し, (注 1) に示す方法でこの波形を解析し, ダッシュポットの減衰比 γ を求めよ.

(3) 固有振動の実験

(a) 図 1 に示すようにばねとおもりを用いて 1 自由度の固有振動系を構成する.

(b) おもりに初期位相を与えて静かに離すとおもりは固有振動をする.

(c) 横揺れなどが収まって振動が安定した上で, 一定回数の振動に要する時間をストップウォッチで数回測定し固有周期 T_n を求め, 次の手順で用いたばねのばね定数を算定せよ.

$$\text{すなわち, } T_n = \frac{2\pi}{\omega_n},\ {\omega_n}^2 = \frac{k}{m} \text{ の関係より } k = \frac{4\pi^2 m}{T_n^2} \tag{13}$$

(d) また (注 2) に示す方法で実験共振曲線から減衰が γ $(= \omega/\omega_n)$ を求め, この値を用いて (d) と異なる理論値共振曲線を描き, 上の曲線と比較検討せよ.

4. 強制振動実験系の解析

おもりの質量を m, 上下のばねのばね定数を k_1, k_2, ダッシュポットの粘性減衰係数を C, クランクピンの偏心量を x_0 とすれば, この系の運動方程式は次のようになる.

$$m\ddot{x} = -k_1 x - C\dot{x} - k_2(x - x') \tag{14}$$

$$\text{すなわち } m\ddot{x} + C\dot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 x' \tag{15}$$

いま, クランク機構を用いて

$$x' = x_0 \sin \omega t \tag{16}$$

を与えるから (14), (15) 式より

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 x_0 \sin \omega t = P_0 \sin \omega t \tag{17}$$

を得る.

運動方程式から分かるように, この系の固有振動数は

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \tag{18}$$

であり, また静的変位量 x_{st} は

$$x_{st} = \frac{P_0}{k_1 + k_2} = \frac{k_2 x_0}{k_1 + k_2} \tag{19}$$

(注 1) 自由減衰振動系の様子を (7) 式に注目して調べてみると, 図 6′ に見るようにまず時間 $t = T/4 = \pi/(2q)$ で極大値をとり, 以後半周期 $(T/2 = \pi/q)$ 毎に極小, 極大値を繰り返しながら減衰していく. 隣接する極値の絶対値の比をとると次の関係を得る.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \cdots = \frac{a_k}{a_{k+1}} = \exp\left(\frac{\gamma\omega_n\pi}{q}\right) = \exp\left(\frac{\pi\gamma}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right) \tag{20}$$

すなわち, 自由減衰振動は系の記録に基づいてその振幅値を図 7′ に示すグラフ上に順次プロットして得られる回路直線の傾きを θ とすれば

$$\tan\theta = \exp\left(\frac{\pi\gamma}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right) \quad \therefore \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \frac{\ln(\tan\theta)}{\pi} = K \tag{21}$$

の関係を用いて γ $[\gamma^2 = K^2/(1+K^2)]$ の値を実験的に知ることができる (ただし, グラフのスケーリングは縦横同一であるのが前提である).

なお, 通常, 記録波形から振幅 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_k,\ a_{k+1}$ を求めるよりも Peak-to-Peak の振幅 $h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4,\ \ldots,\ h_k,\ h_{k+1}$ を求めるほうが容易であるが, このデータを用いても全く同様に γ の値を知ることができる. なぜならば,

$$\begin{aligned}\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_3} = \frac{h_3}{h_4} = \ldots = \frac{h_k}{h_{k+1}} = \ldots \\ = \frac{a_1+a_2}{a_2+a_3} = \frac{a_2+a_3}{a_3+a_4} = \cdots = \frac{a_k+a_{k+1}}{a_{k+1}+a_{k+2}} = \ldots \\ = \frac{a_k(1+\pi\gamma/\sqrt{1-\lambda^2})}{a_{k+1}(1+\pi\gamma/\sqrt{1-\lambda^2})} = \frac{a_k}{a_{k+1}}\end{aligned}$$

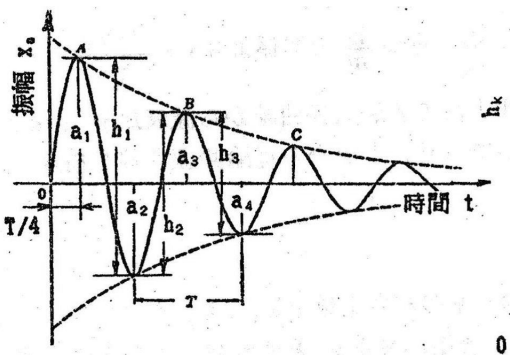

図 6

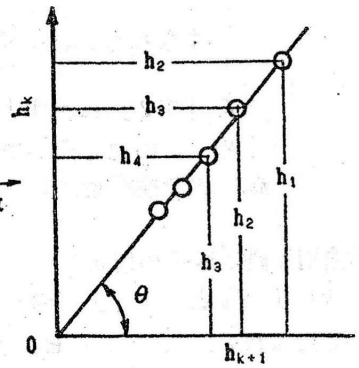

図 7

(注 2) 図 8′ に示すように共振曲線が共振ピークを持つ時, ピークが現れる共振振動 ω (あるいは振動数比 λ) と共振ピーク値 $(x_a)_{\max}$ については (11) 式を解析して以下のような関係が得られる.

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\gamma^2} \quad \text{あるいは} \quad \lambda_r = \sqrt{1-2\gamma^2} \tag{22}$$

$$\left(\frac{x_a}{x_{st}}\right)_{\max} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{1-\lambda^2}} \tag{23}$$

また, $\gamma \ll 1$ の場合には

$$\omega_r \fallingdotseq \omega_n(\lambda_r \fallingdotseq 1), \tag{24}$$

$$\left(\frac{x_a}{x_{st}}\right)_{\max} \fallingdotseq \frac{1}{2\gamma} \tag{25}$$

$\gamma \ll 1$ の場合には (25) 式の関係を用いて実験的に γ の値を簡単に求めることができるが, ピーク値の測定は不安定で誤差を伴いやすい. そこで以下に示すような関係を用いて共振ピーク幅 $\Delta\omega$ から γ を求めることが多い. すなわち, 振幅がピーク値の $1/E$ となる振動数 ω_1, ω_2 (振動数比 λ_1, λ_2) を (10) 式から求めると,

$$\frac{x_{st}}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\gamma^2\lambda^2}} = \frac{(x_a)_{\max}}{E} \quad \text{に (25) 式の関係を用いて}$$

方程式 $\lambda^4 + (4\gamma^2-2)\lambda^2 + 1 - 4E^2\gamma^2 = 0$ を得る (ただし, $\gamma \ll 1$).
したがって $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2 - 4\gamma^2$.

$$\lambda_1^2\lambda_2^2 = 1 - 4E^2\gamma^2 \to \lambda_1\lambda_2 = \sqrt{1-4E^2\gamma^2} \fallingdotseq 1^2E^2\gamma^2$$

$$\therefore (\lambda_1-\lambda_2)^2 = \lambda_1^2+\lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2 = 2-4\gamma^2-2(1-2E^2\gamma^2) = 4\gamma^2(E^2-1)$$

$$\text{よって, } \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 2\gamma\sqrt{E^2-1} \tag{26}$$

$$\text{特に } E=\sqrt{2} \text{の時には, } \Delta\lambda = 2\gamma \tag{27}$$

ここで図 9′ に示すように振幅が x_1 (ピーク値 $(x_a)_{\max}$ の $1/b$ と仮定する) の時と x_2 (x_1/E) となる 2 ヶ所で共振ピーク幅 $\Delta\lambda_1$, $\Delta\lambda_2$ を測定すれば, (25) 式の結果から次の関係が成り立つ.

$$\Delta\lambda_1 = 2\gamma\sqrt{b^2-1},\ \Delta\lambda_2 = 2\gamma\sqrt{(bE)^2-1},\ \text{ただし } b = \frac{(x_a)_{\max}}{x_a}$$

両式から b を消去して γ についてとくと次の結果が得られる.

$$2\gamma = \sqrt{\frac{\Delta\lambda_2^2 - E^2\Delta\lambda_1^2}{E^2-1}} \tag{28}$$

$$\text{特に } E=\sqrt{2} \text{の時には, } 2\gamma = \sqrt{\Delta\lambda_2^2 - 2\Delta\lambda_1^2} \tag{29}$$

この関係を利用すれば共振ピーク値, ピーク位置に関わらず, 共振ピーク幅のみから γ の値を知ることが出来る.

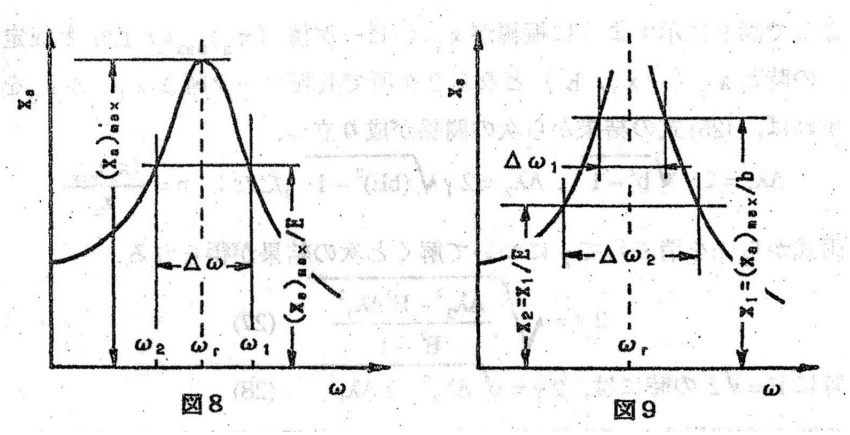

図 8　　図 9

5. 実験結果

(1) 強制振動

まず固有振動の実験結果よりばね定数 k を算出する．ここで, 3113 g の錘の周期は 1.022 sec, 477 g の錘の周期は 0.913 sec である．(13) 式より,

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{4\pi^2 m}{T_n^2} \\
&= \frac{4\pi^2 \times 3.113}{1.022^2} \\
\therefore k_1 &= 117.66 \text{ N/mm} \\
k_2 &= \frac{4\pi^2 m}{T_n^2} \\
&= \frac{4\pi^2 \times 0.477}{0.913^2} \\
\therefore k_2 &= 22.59 \text{ N/mm}
\end{aligned}
$$

次に, ω_n, x_{st} を算出する．(18), (19) 式より,

$$
\begin{aligned}
\omega_n &= \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \\
&= \sqrt{\frac{117.66 + 22.59}{3.020}} \\
\therefore \omega_n &= 6.81 \text{ rad/s} \\
x_{st} &= \frac{P_0}{k_1 + k_2} = \frac{k_2 x_0}{k_1 + k_2} \\
&= \frac{22.59 \times 23.55}{117.66 + 22.59} \\
\therefore x_{st} &= \ 3.79 \text{ mm}
\end{aligned}
$$

次に, 振動数比 λ, 振幅比 x_a/x_{st} を算出し, データの整理したものをに表 1 を示す.

表 1　周波数応答の実験結果 1

Data No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
外力の周期 T [s]	10.53	6.67	2.82	1.44	1.37	1.37	1.45	1.22	1	0.9
外力角周波数 ω [rad/s]	0.597	0.942	2.228	4.363	4.586	4.586	4.333	5.150	6.283	6.981
振動数比 λ (ω/ω_n)	0.088	0.138	0.327	0.640	0.673	0.673	0.636	0.756	0.922	1.024
振幅 x_a[mm]	2.50	3.00	4.50	5.00	5.50	6.00	8.25	9.75	11.50	22.00
振幅比 x_a/x_{st}	0.66	0.79	1.19	1.32	1.45	1.58	2.18	2.57	3.03	5.80

表 2　周波数応答の実験結果 2

Data No.	11	12	13	14	15	16	17
外力の周期 T [s]	0.874	0.832	0.792	0.74	0.602	0.493	0.416
外力角周波数 ω [rad/s]	7.19	7.55	7.93	8.49	10.44	12.74	15.10
振動数比 λ (ω/ω_n)	1.055	1.108	1.164	1.246	1.532	1.870	2.216
振幅 x_a [mm]	20.50	11.50	10.50	5.50	3.00	1.00	0.50
振幅比 x_a/x_{st}	5.41	3.03	2.77	1.45	0.79	0.26	0.13

次に, 表 1 の値を用いて実験共振曲線と理論共振曲線を図 1 に示す.

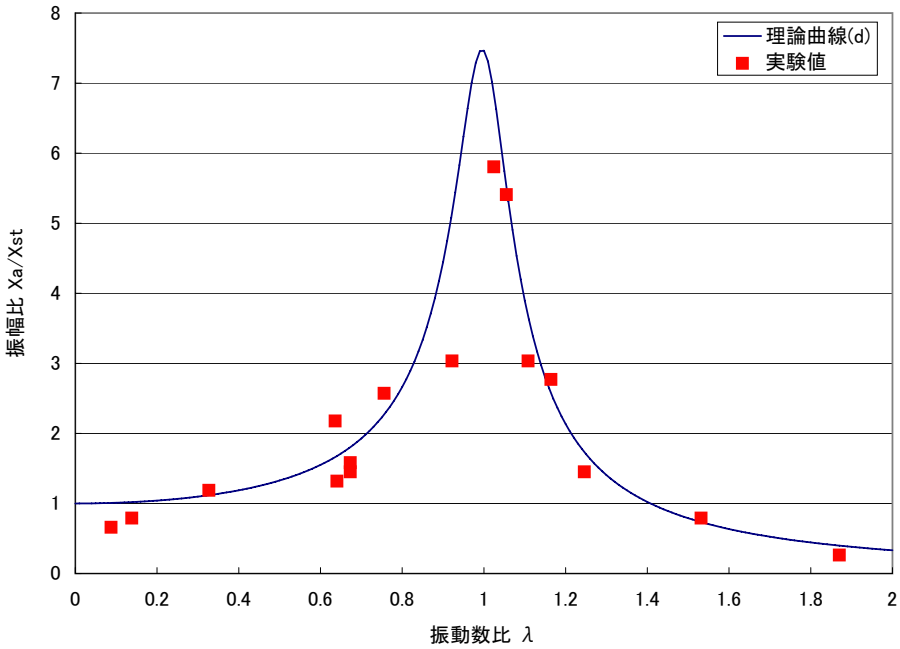

図 1　共振曲線

(2) 自由減衰振動の実験

まず, 減衰比 γ を算出する.

図 2 に示す自由減衰振動の振幅値のグラフから, θ を読み取る. 図 2 から θ を読み取ると $\tan\theta = \tan 39^\circ$ となり, これを (21) 式に代入すると,

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{\ln(\tan\theta)}{\pi} \\
&= \frac{\ln(\tan 39^\circ)}{\pi} \\
\therefore K &= -0.0672 \\
\gamma_1 &= \sqrt{\frac{K^2}{1+K^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(-0.0672)^2}{1+(-0.0672)^2}} \\
\therefore \gamma_1 &= 0.0670
\end{aligned}
$$

となる.

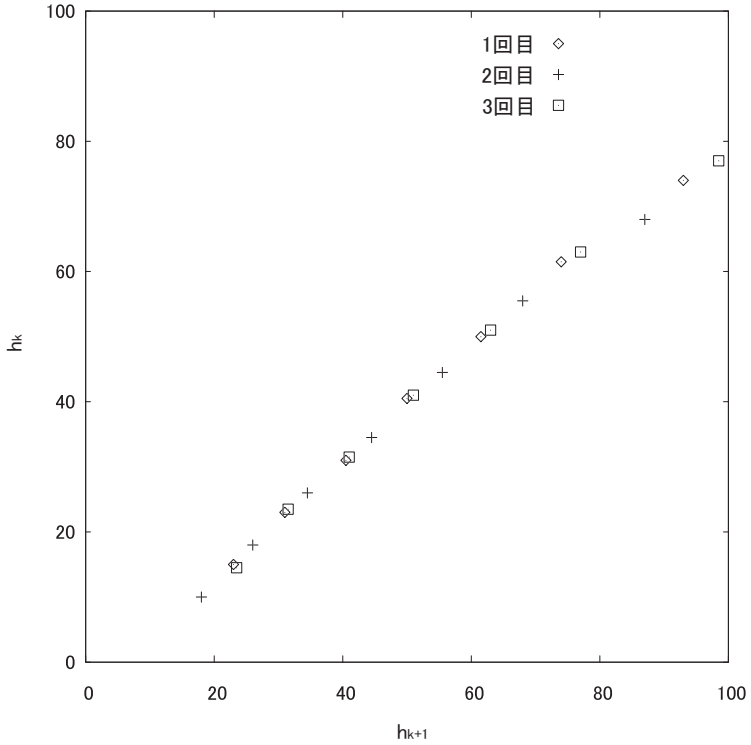

図 2　自由減衰振動の振幅値

6. 考察

今回の実験で得られた図 1 の共振曲線と理論曲線を比較すると, 共振点付近で振幅比が大きくなっていることや, 共振点を過ぎると 0 に収束するところなどは同じ挙動は示していが, 実験値と理論値の誤差が多くの点で見られる. これはモータのつまみの調整が難しく回しても速度が上がらなかったり, 記録ドラムに貼った記録用紙でペンがにじんで正確な振幅が読めなかったことなどが大きな誤差を生む原因になったと考えられる.