

1. 目的

針金状の金属試料を用いてねじり振子を構成し、振子のねじり振動の周期を測定することから材質ごとの剛性率を求める。

2. 原理

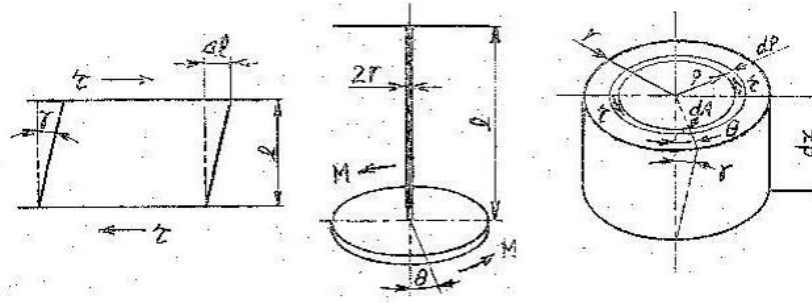


図1 原理及び実験装置

図1左のような単位厚さの矩形物体にせん断応力 τ が作用すると、物体に生じるせん断ひずみ γ は、

$$\tan \gamma = \frac{\Delta l}{l} = \gamma \quad (1)$$

で表される。($\Delta l \ll l$ の場合) .

Hooke の法則によれば、弾性域内での γ の大きさは τ に比例し、両者の間には

$$\tau = G\gamma \quad (2)$$

なる関係があり、 G をせん断弾性係数といい、材料固有の値である。

G の値を図1左のような形で γ と τ を測定して求めるのは困難であるため、丸棒または針金状の試料を図1中のようにねじり振動させることで G の値を求める。

図1中のような半径 r 、長さ l の針金の一端に質量 m の錘を中心一致させて取り付け、もう一端を固定させた時、このねじり振子を角度 θ だけねじると針金表面での γ の値は、

$$\gamma = r \frac{\theta}{l} \quad (3)$$

となる。この時、針金の全ねじれ角 θ と針金の軸方向単位長さあたりのねじれ角 ϕ の間には、

$$\phi = \frac{\theta}{l} \quad (4)$$

なる関係がある。

ねじりによって円柱断面には断面の半径に対し直角方向に τ が生じ、その大きさは断面中心からの半径 ρ に比例する。断面における断面中心の周りのせん断応力によるモーメントの

総和は外部から加えられたねじりモーメント M に等しい． ρ 上での単位断面面積 dA にねじりモーメント dM は，

$$dM = \tau_{(r=\rho)} r_{(r=\rho)} dA = (G \cdot \rho \phi) \cdot \rho dA = \rho^2 \phi G dA$$

となり，よって M は，

$$M = \int_A \rho^2 \phi G dA = \phi G \int_A \rho^2 dA \quad (5)$$

となる．ここで， $J = \int_A \rho^2 dA$ とし「軸断面の中心軸に関する断面二次モーメント」と定義すると，

$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_0^r \rho^2 \cdot \pi \rho d\rho = \frac{\pi}{2} r^4 \quad (6)$$

となる．以上の関係から，

$$M = \phi G J = \frac{\pi \theta G r^4}{2l} \quad (7)$$

となる．

さて，このねじり振子から手を離すと，振子は回転振動をはじめ，その運動方程式は，

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -M = -\frac{\pi G r^4}{2l} \theta \quad (8)$$

なる微分方程式で表される．この微分方程式を解くと，

$$\theta = A \cos(\omega t + \alpha) = A \cos \left(\sqrt{\frac{\frac{\pi G r^4}{2l}}{I}} t + \alpha \right)$$

なる解が得られ (A, α は振動の初期条件により定まる定数)，錘の回転振動が単振動であることが分かる．振動の周期 T は，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\frac{\pi G r^4}{2l}}} \quad (9)$$

となり，よって G は，

$$\therefore G = \frac{8\pi l}{r^4 T^2} I \quad (10)$$

なる式から求められる．

但し，以上は本実験で使用する針金止めや錘の支持金具の慣性モーメントを無視した場合の値であり，また錘と針金の重心が一致していない場合には適用できない．本実験では，針金には錘の慣性モーメントのみが作用しているとみなして，(10)式から G を求める一方，以下に示す手法によって錘以外の慣性モーメントの影響を消去して別途 G を求める．

外径 $2R_1$, 内径 $2R_2$, 厚さ H , 質量 m の円筒断面の錘をねじり振子に取り付けて、ねじり振動させた時、円筒断面を鉛直に吊るした際の周期を T_1 , 水平に吊るした際の周期を T_2 とすると、それぞれの場合における針金の断面二次モーメント I_1 及び I_2 は以下のようになる。

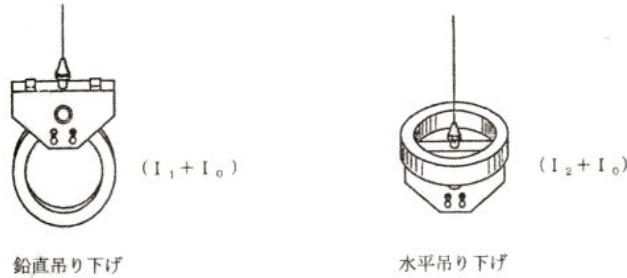


図2 鉛直吊り下げ及び水平吊り下げ

$$I_1 = m \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) , \quad I_2 = m \frac{R_1^2 + R_2^2}{2}$$

また、針金止めや錘の支持金具の慣性モーメントを I_0 とすると、(9) 式から錘を鉛直に吊るした際の振動周期 T_1 及び水平に吊るした際の周期 T_2 は以下のように表される。

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 + I_0}{\frac{\pi Gr^4}{2l}}} , \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2 + I_0}{\frac{\pi Gr^4}{2l}}}$$

上の2式から I_0 を消去すると、

$$T_2^2 - T_1^2 = \frac{8\pi l(I_2 - I_1)}{Gr^4}$$

となり、よって G は、

$$G = \frac{2\pi lm \left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{H^3}{3} \right)}{r^4(T_2^2 - T_1^2)} \quad (11)$$

なる式にて、錘以外の慣性モーメントの影響を消去して求めることが出来る。

3. 実験装置

試料(金属棒)、錘、針金止め、支持金具、トースカン(または望遠鏡)、巻尺、マイクロメータ、ノギス、秤、ストップウォッチ

4. 実験方法

(1) 曲がっている箇所がある場合は、直線的に伸ばした上で針金に錘を吊るし、この長さ l_1 を測定する。また、数箇所において直交する2方向から針金の直径 $2r$ をマイクロメータで測定する。

- (2) 錘の内径，外径，厚さを直交する 2 方向からノギスにて 0.05[mm] 単位で測定する．また，質量を秤にて測定する．
- (3) ピン 2 本を介して錘を支持金具に鉛直に吊るすように取り付け，錘表面にチョーク等で幅の狭い印をつける．
- (4) 横揺れを生じさせないよう錘にねじり振動を与える．この時，ねじり角はあまり大きくせず，横揺れが生じる際には手を軽く添えてこれを押さえてやる．
- (5) 数回振動させて横揺れが十分収まってから，錘表面につけた印がトースカンの針先を通過する周期をストップウォッチの LAP 機能で連続測定する．測定中から 10 回分の振動周期の変動については注意すること．平均化して安定した値となればよいが，変動の幅が大きすぎたり，変動回数が多い場合には再度測定し直す．
- (6) 中心を一致させるように錘を支持金具の上に水平に置き，(4)，(5) と同様の手順でねじり振動の周期を測定する．測定完了後，針金の長さを測定し直し，このときの測定値と先に測定した l_1 の平均値を l とする．
- (7) 針金の材質を変えて (1) ~ (6) を繰り返す．

5. 結果

まず，錘の各測定値を表 1 に示す．

表 1 錘の各測定結果

$2R_1$ [mm]	$2R_2$ [mm]	H [mm]	m [kg]
190.20	129.40	31.80	3.339

次に，各針金の測定値を表 2 に示す．

表 2 各針金の測定結果

	鋼	銅	真鍮
l_1 [mm]	650	663	650
$2r$ [mm]	0.94	0.96	0.93

さらに，各針金の周期を表 3 に示す．

表 3 各針金の周期 単位 [s]

回	鋼		銅		真鍮	
	T_1	T_2	T_1	T_2	T_1	T_2
1	8.92	11.70	9.18	12.21	11.55	15.63
2	8.80	11.60	8.73	12.26	11.68	15.86
3	8.70	11.76	8.84	12.20	11.57	16.05
4	8.13	11.62	9.70	12.30	11.62	15.76
5	8.46	11.62	9.00	12.26	11.60	15.96
6	8.80	11.65	8.71	12.31	11.62	15.94
7	8.88	11.73	9.20	12.22	11.64	15.70
8	8.56	12.02	8.81	12.32	11.62	16.09
9	8.92	11.68	8.83	12.19	11.50	15.59
10	8.73	12.42	9.03	12.27	11.71	16.09
平均	8.69	11.78	9.00	12.25	11.61	15.87

以上から，表 1～3 の測定値より式 (11) を用いて各針金のせん断弾性係数 G を求める．

例えば鋼について，

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{2\pi lm \left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{H^3}{3} \right)}{r^4 (T_2^2 - T_1^2)} \quad \text{より} \\
 &= \frac{2\pi \times 650 \times 3.391 \times \left((190.20/2)^2 + (129.40/2)^2 - \frac{31.80^2}{3} \right)}{(0.94/2)^4 \times (11.78^2 - 8.69^2)} \\
 \therefore G &= 57.85[\text{GPa}]
 \end{aligned}$$

となる．同様にして，銅では $G = 48.97[\text{GPa}]$ ，真鍮では $G = 32.66[\text{GPa}]$ であった．

6. 考察

まず，鋼のせん断弾性係数の文献値は $80[\text{GPa}]$ であるから，実験結果との誤差は

$$(80 - 57.85)/80 \times 100 = 27.7\%$$

である．同様にして，銅の G の文献値は $46[\text{GPa}]$ より 6.5% の誤差で，真鍮の G の文献値は $39[\text{GPa}]$ なので 16.3% の誤差があった．

ゆえに，この実験では誤差が非常に目立った．この原因としては，針金に関しては，きちんと伸びずに所々曲がっていることや，直径などの測定値が厳密でないことが挙げられる．さらに，何回も同じものを使用しているのも，劣化していることも考えられる．また錘に関しては，吊るした時に微妙に水平でないことや横揺れによる周期の不正確さが挙げられる．