等質正則開凸錐と単位元を持つクラン

T. Nakagawa

2011 年 1 月 20 日

要旨

Vinberg の理論より, 等質錐と単位元を持つクランとは 1 対 1 に対応するが, 本論文ではこの等質錐とクランの対応を再構築し, 見通しの良い内容に改める. 特に単位元を持つクランから等質錐の構成については, Vinberg の原論文とは異なった, より直接的な道筋を与える.

1 はじめに

有限次元実ベクトル空間 V における正則開凸錐を Ω とする. ここで開凸錐 Ω が正則であるとは, Ω が直線を含まないときをいう. Ω の線型自己同型群

$$G(\Omega) := \{g \in GL(V) \ ; \ g(\Omega) = \Omega\}$$

が Ω に推移的に作用しているとき, Ω を等質正則開凸錐あるいは単に等質錐と呼ぶ. 等質正則凸領域も同様に定義される. 等質正則凸領域および等質正則開凸錐の代数的な理論は Vinberg によって 1963 年に構築され, それらの幾何学の代数的な研究手法が確立されたと言える (Vinberg [13]). 特に等質正則開凸錐は単位元を持つクラン, T 代数, そして N 代数という 3 つの代数が相俟って錐の幾何的性質に豊富な話題を提供する. 双対空間 V^* における Ω の双対錐

$$\Omega^* := \left\{\xi \in V^* \ ; \ 任意の\ x \in \overline{\Omega}\ に対して, \ \langle \xi, x\rangle > 0\right\}$$

は, 群 $G(\Omega)$ が反傾表現によって Ω^* に推移的に作用する等質正則開凸錐である. 開凸錐 Ω が自己双対であるとは, V 上の適当な内積によって V^* と V を同一視することにより $\Omega^* = \Omega$ となるときをいう. 自己双対な等質正則開凸錐を対称錐と呼ぶ. その代数的記述は Koecher と Vinberg によって 1950 年代終わりに成され, 対称錐は Euclid 型 Jordan 代数という可換な非結合的代数と 1 対 1 に対応する. 対称錐は等質正則開凸錐の中でも簡約 Lie 群 $G(\Omega)$ が推移的に作用する Riemann 対称空間になっており, その上の調和解析も豊富に展開される (Faraut-Korány [1]).

本論文では代数的対象として主に単位元を持つクランを扱う. 定理 3.1 (Vinberg [13, Chapter I, Theorem 1]) より等質正則開凸錐 Ω に単純推移的に作用する極大連結三角化可能 Lie 群が存在し, その作用から Ω の任意に固定した点 E における接空間 $T_E\Omega \simeq V$ に E を単位元とするクラン構造が自然に入る (定理 3.2). クランは非可換な非結合的代数であり, 次の性質を持つ:

(i) 任意の $u, \ v, \ w \in V$ に対して, $[u, v, w] = [v, u, w]$,

(ii) 線型形式 $\varpi \in V^*$ が存在して, $\langle \varpi, u \triangle v\rangle$ は V に内積を定める,

(iii) 各 $u \in V$ に対して, 左かけ算作用素 L_u の固有値は全て実数である.

ここで $[\cdot,\cdot,\cdot]$ は結合子であり, V における双線型な積を $\triangle$ で表している．写像 $\varpi \in V^*$ を認容線型形式と呼ぶ．もちろん対称錐にもクラン構造を入れることができる．また T 代数は, ベクトル成分の行列から成る非結合的代数であるが, 上で得たクランを基に等質正則開凸錐は T 代数の中の正定値対称行列の成す錐として実現される．すなわち, 等質正則開凸錐を正定値実対称行列の成す錐の一般化として理解することができる．

開凸錐 Ω が既約であるとは, 直和分解 $V = V_1 \oplus V_2$ と直積分解 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ を満たす非自明な部分空間 $V_1,\ V_2$ と開凸錐 $\Omega_1 \subset V_1,\ \Omega_2 \subset V_2$ が存在しないときをいう．互いに線型同型でない 10 次元以下の既約等質正則開凸錐は 135 個存在し, そのうち自己双対な錐は 12 個である (Kaneyuki-Tsuji [2])．この分類は, N 代数 (T 代数の結合的な部分代数で対角成分が全て 0 である上三角行列から成るもの) をスケルトンという無向グラフと 1 対 1 に対応付けることによって得られ, 幾つかの錐は T 代数によって明示されている．一方, 11 次元以上では, 各次元で互いに線型同型でない既約等質正則開凸錐が連続濃度存在する (Vinberg [13])．また, 単位元を持つクラン V が単純であるとは, 非自明な (両側) イデアルが存在しないときをいう．等質正則開凸錐 Ω と単位元を持つクラン V は 1 対 1 に対応するから, Ω が既約であるための必要十分条件は, それに付随する V が単純である．Tsuji-Shimizu [11, Theorem 2] より, 任意の単位元を持つクラン V は順序を込めて一意的に単純クラン V_j たちの直和に分解される．よって, V に付随する錐 Ω は V_j に付随する既約等質正則開凸錐 Ω_j の直積に分解される:

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s, \quad \Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_s, \quad \Omega_j \subset V_j \qquad (1 \leq j \leq s).$$

これにより, 既約等質正則開凸錐の分類は単純クランの分類に帰着されることも分かる．既約対称錐と単純 Euclid 型 Jordan 代数の分類は完全に終わっている．

本研究では Vinberg 対応 [13, Chapter II] がより直接的になるように書き改めたが, その動機付けとなった 2 つの事柄を述べる．1 つの動機は, 等質正則開凸錐と単位元を持つクランの対応がアファイン空間における凸領域を経由して与えられているため議論の展開が煩雑であり, また論文の内容もあまり整理されていないことによる．等質正則開凸錐から単位元を持つクランのその論文での構成法を概観してみよう．まず n 次元実アファイン空間 P の自由ベクトルから成るベクトル空間を R_P とし, P における正則凸領域を U とする．アファイン空間 P を原点 0 を通らない超平面として $n+1$ 次元ベクトル空間 R に埋め込む．任意の正則凸領域 U に対して

$$V(U) := \{\lambda x \ ;\ x \in U,\ \lambda > 0\}$$

と定めれば, $V(U)$ は正則開凸錐である．凸領域 U が等質ならば, 錐 $V(U)$ も等質になる．次に [13, Chapter I, Theorem 1] より, 等質正則凸領域 U に単純推移的に作用する極大連結三角化可能アファイン Lie 群が存在し, その作用から U の任意に固定した点における接空間 R_P にクラン構造が入る．このクランを $\mathfrak{L}(U)$ で表す．そして, 等質正則開凸錐 $V(U)$ に対応するクラン $\mathfrak{L}_1$ は次で与えられる ([13, Chapter II, Proposition 3]):

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}(U) \oplus \{\lambda e \ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

ここで, e は $\mathfrak{L}_1$ の単位元である．我々の方法は, 前頁でも触れたが, 集合 $U = \Omega$ をベクトル空間 V における等質正則開凸錐とし, 空間 R_P を V と同一視することで V にクラン構造を直接入れる．これにより, クランの性質を確かめる議論も明快になる (第 3.3 節)．

もう 1 つの動機は, 単位元を持つクランから等質正則開凸錐の構成に論理の飛躍があり, その構成法もあまり直接的とは言えないからである．Vinberg によれば, まず単位元 e を持つクラン $\mathfrak{L}$ の無限小アファイン変換から成る三角化可能 Lie 代数を $T(\mathfrak{L})$ で表し, それに対応するアファイン Lie 群を $\mathfrak{T}(\mathfrak{L})$ で表す．写像 s を認

容線型形式とする．次に, Lie 代数 $T(\mathfrak{L})$ の部分 Lie 代数

$$T_0 := \{L_a \in T(\mathfrak{L})\ ;\ s(a) = 0,\ a \in \mathfrak{L}\}$$

に対応する Lie 群を $\mathfrak{T}_0$ で表し, E をクラン $\mathfrak{L}$ の恒等写像とすれば

$$T(\mathfrak{L}) = T_0 + \{L_{\lambda e}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad \mathfrak{T}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{T}_0 \times \{\lambda E\ ;\ \lambda > 0\}$$

が成り立つ．単位元 $e \in \mathfrak{L}$ を通る $\mathfrak{T}(\mathfrak{L})$ と $\mathfrak{T}_0$ の軌道をそれぞれ $V(\mathfrak{L})$ と S で表す．このとき

$$V(\mathfrak{L}) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda S$$

が等質正則開凸錐になるというのである．しかし, その証明の過程で, S が下に凸であるという所の議論が粗雑でギャップがあるように, 少なくとも筆者には思える．また $V(\mathfrak{L})$ の凸性を示す所は, $V(\mathfrak{L})$ の凸包を導入して, 凸幾何と Riemann 幾何の一般論で済ましている．我々の方法は, 単位元 E を持つクラン V の正規分解

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{R}E_i \oplus \bigoplus_{j>i} V_{ji}, \quad E = \sum_{j=1}^{r} E_j$$

から等質正則開凸錐を標準的に構成する (第 6 節)．ここで

$$\begin{aligned} &E_i \triangle E_j = \delta_{ij} E_i \qquad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ r), \\ &\qquad V_{ji} = \left\{ u \in V\ ;\ E_k \triangle u = \frac{1}{2}(\delta_{kj} + \delta_{ki})u,\ u \triangle E_k = \delta_{ki} u \right\} \qquad (1 \le i < j \le r). \end{aligned}$$

Vinberg は V の分解を上三角型としている．クラン V 上の左かけ算作用素から成る三角化可能 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ に対応する連結 Lie 群を $H := \exp \mathfrak{h}$ で表す．Lie 代数 $\mathfrak{h}$ の部分空間 $\mathfrak{a},\ \mathfrak{n}$ を

$$\mathfrak{a} := \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{R}L_{E_i}, \quad \mathfrak{n} := \sum_{j>i} \mathfrak{n}_{ji} \qquad (\mathfrak{n}_{ji} := \{L_u \in \mathfrak{h}\ ;\ u \in V_{ji}\})$$

と定めれば, それぞれ可換部分 Lie 代数と冪零部分 Lie 代数であり, それらに対応する連結 Lie 群を $A := \exp \mathfrak{a},\ N := \exp \mathfrak{n}$ で表す．そして

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{n}, \quad H = A \ltimes N$$

が成り立つ．このとき, 単位元 $E \in V$ を通る H 軌道 $\Omega := H \cdot E$ が等質正則開凸錐になる (定理 6.1)．凸性の証明が最も大変であり, その手順としては, まず認容線型形式 $\varpi \in V^*$ を通る H の開軌道 $H \cdot \varpi$ に対して

$$(H \cdot \varpi)^\dagger := \left\{ x \in V\ ;\ \text{任意の}\ \xi \in \overline{H \cdot \varpi} \setminus \{0\}\ \text{に対して},\ \langle \xi,\, x \rangle > 0 \right\}$$

と定める．集合 $(H \cdot \varpi)^\dagger$ は開凸錐であり, $\Omega \subset (H \cdot \varpi)^\dagger$ が言える．次に, $(H \cdot \varpi)^\dagger = \Omega$ を証明することで Ω の凸性が示されるが, そのために錐の特性函数と類似した次の函数を導入する:

$$\psi(x) := \int_{H \cdot \varpi} e^{-\langle \xi,\, x \rangle} d\xi \qquad (x \in V).$$

ここで, $d\xi$ は V^* 上の Lebesgue 測度である．また $x \in (H \cdot \varpi)^\dagger$ ならば $\psi(x) < \infty$ であり, $(H \cdot \varpi)^\dagger$ 上で $\log \psi$ は狭義凸函数である．そして Ω 内の点列 $\{x_\nu\}_\nu$ が Ω の境界 $\partial\Omega$ 上の点 x_0 に収束すると仮定する．このとき

$$\psi(x_\nu) \to \infty \qquad (\nu \to \infty)$$

が成り立つから, $(H\cdot\varpi)^\dagger\setminus\Omega=\varnothing$ となり証明が終わる．いま述べた構成法は, 正規 j 代数を用いた Rossi-Vergne [7, Theorem 4.15] の証明に基づく．実際, Lie 代数 $\mathfrak{h}$ は分裂可解 ($\mathfrak{h}$ の随伴表現は三角化可能) になっており, 半直積 Lie 代数 $\mathfrak{h}\ltimes V$ に正規 j 代数の構造が入る．本論文では一貫性を保つために, 正規 j 代数を経ずに, 直接クランの言葉で書き直した．

本論文の構成について説明する．第 2 節では, 正則開凸錐およびその特性函数について要約する．第 3 節では, 等質正則開凸錐から単位元を持つクランを構成する．第 3.2 節で等質正則開凸錐 Ω の任意に固定した点 (基点) E における接空間 V に代数構造を入れ, それが実際に E を単位元とするクランになっていることを第 3.3 節で示す．任意の $u\in V$ に対して $u\vartriangle E=u$ は明らかであるが, $E\vartriangle u=u$ は非自明である．認容線型形式の存在は Ω の特性函数から導かれる．

第 4 節では, クランが主冪等元という一意的な元に関して主分解されることを考察する．主冪等元による左かけ算作用素の固有値 1 と 1/2 に対応する固有空間をそれぞれ $V_{(1)}$ と $V_{(1/2)}$ で表すとき, 直交直和分解 $V=V_{(1)}\oplus V_{(1/2)}$ をクラン V の主分解と呼ぶ．クランが単位元を持てば, それは主冪等元になり $V=V_{(1)}$ が成り立つ．すなわち主分解は単位元を持たないクランに対して適用されるが, 第 5 節以降たびたび用いる．そして, 単位元を持たないクランにおける計算を行う際に有用な命題を証明する．

第 5 節では, 単位元を持つクランが正規分解できることを証明する．クランの性質より左かけ算作用素たちは Lie 代数を成し, それらの固有値は全て実数である．よってそれらは同時三角化可能である．ゆえに, その作用によって不変な余次元 1 の部分空間が存在する．従って [13, Chapter II, Lemma 2] の証明のように錐を持ち出す必要はない (補題 5.1)．正規分解されると, クランにおける計算を行う際に有用な関係式を得る．

第 6 節では, 単位元を持つクランから等質正則開凸錐を構成する．その方法は先に述べた通りである．その過程で, 我々は次の重要な公式を導く (命題 6.4):

$$\langle\varpi,\,h\cdot E\rangle=\sum_{j=1}^{r}\left(e^{\lambda_j}\varpi_j+\frac{1}{2}\sum_{k>j}e^{\lambda_k}\|u_{kj}\|_{\varpi}^2\right)\qquad(h\in H,\ \lambda_j\in\mathbb{R},\ u_{kj}\in V_{kj}).$$

ここで $\varpi_j:=\langle\varpi,\,E_j\rangle$ であり, $\|\cdot\|_\varpi$ は認容線型形式 ϖ から定まるノルムである．この公式は錐の凸性を示すために必要になる．

第 7 節では, Vinberg 対応の証明を与える．等質正則開凸錐と単位元を持つクランの集合としての 1 対 1 対応および線型同型類と同型類が 1 対 1 に対応することを証明する．これは [13, Chapter II, Theorem 2] であるが, 証明は省略されていた．ただし, 我々は開凸錐の線型同型の定義を基点付き集合に対してする (定義 7.2)．

最後に, Vinberg の理論 [13] で登場する幾何的対象と代数的対象の関係を以下に表しておこう:

$$\begin{array}{ccccccc}
\{\text{等質正則凸領域}\} & \leftrightarrow & \{\text{クラン}\}, & & & & \\
\cup & & \cup & & & & \\
\{\text{等質正則開凸錐}\} & \leftrightarrow & \{\text{単位元を持つクラン}\} & \leftrightarrow & \{T\text{ 代数}\} & \leftrightarrow & \{N\text{ 代数}\}, \\
\cup & & \cup & & & & \\
\{\text{対称錐}\} & \leftrightarrow & \{\text{Euclid 型 Jordan 代数}\}. & & & &
\end{array}$$

参考文献

[1] J. Faraut and A. Korány, “Analysis on Symmetric Cones,” Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, 1994.

[2] S. Kaneyuki and T. Tsuji, *Classification of homogeneous bounded domains of lower dimension*, Nagoya Math. J., **53** (1974), 1-46.

[3] M. Koecher, "The Minnesota Notes on Jordan Algebras and Their Applications," Lecture Notes in Mathematics **1710**, Springer, Berlin, 1999.

[4] 伊師英之, 等質錐に付随する小行列式型多項式, 数理解析研究所講究録, **1238** (2001), 30-48.

[5] T. Nomura, *Family of Cayley transforms of a homogeneous Siegel domain parametrized by admissible linear forms*, Diff. Geom. Appl., **18** (2003), 55-78.

[6] —, 対称錐・等質開凸錐, 講義ノート, 2006.

[7] H. Rossi and M. Vergne, *Representations of certain solvable Lie group on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group*, J. Funct. Anal., **13** (1973), 324-389.

[8] I. Satake, *On classification of quasi-symmetric domains*, Nagoya Math. J., **62** (1976), 1-12.

[9] —, "Algebraic Structures of Symmetric Domains," Iwanami Shoten and Princeton University Press, 1980.

[10] 志摩裕彦, "ヘッセ幾何学," 裳華房, 2001.

[11] T. Tsuji and S. Shimizu, *The irreducible decomposition of an affine homogeneous convex domain*, Tohoku Math. J., **38** (1986), 371-378.

[12] È. B. Vinberg, *The Morozov-Borel theorem for real Lie groups*, Soviet Math. Dokl., **2** (1961), 1416-1419.

[13] —, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340-403.