正則開凸錐の幾何概説

T. Nakagawa

January 20, 2011

この論説では, (正則) 開凸錐の一般論を概説する. 詳しくは Faraut-Korány [1], 志摩 [2], Vinberg [3] などを参照されたい.

1 開凸錐と双対錐

V を有限次元実ベクトル空間とする.

定義 1.1 V の部分集合 $\Omega \neq \varnothing$ が次の性質を満たすとき, 集合 Ω を**開凸錐** (open convex cone) と呼ぶ:

(i) 集合 Ω は開集合である,

(ii) 任意の $x,\ y \in \Omega$ と $\lambda \in (0,\,1)$ に対して, $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$. すなわち Ω は凸集合である,

(iii) 任意の $x \in \Omega$ と $\lambda > 0$ に対して, $\lambda x \in \Omega$. すなわち Ω は錐である.

この定義において, 部分集合 Ω が (ii) と (iii) を満たすための必要十分条件は, 任意の $x,\ y \in \Omega$ と任意の $\lambda,\ \mu > 0$ に対して $\lambda x + \mu y \in \Omega$ である.

以下, ベクトル空間 V にはノルム $\|\cdot\|$ が定義されているとする. これにより V は距離空間になる. V^* をベクトル空間 V の双対空間とする. また, (連続) 線型形式 $\xi \in V^*$ の $u \in V$ における値 $\xi(u)$ を $\langle \xi,\,u\rangle$ と書くことにする. ベクトル空間 V^* は作用素ノルム

$$\|\xi\| := \sup_{\|u\|\leq 1} |\langle \xi,\,u\rangle| \qquad (\xi \in V^*,\ u \in V)$$

によってノルム空間になる.

開凸錐 Ω の位相的閉包を $\overline{\Omega}$ で表す.

定義 1.2 V の開凸錐 Ω に対して, 双対空間 V^* の部分集合 Ω^* を

$$\Omega^* := \left\{\xi \in V^*\ ;\ \text{任意の } x \in \overline{\Omega} \text{ に対して, } \langle \xi,\,x\rangle > 0\right\}$$

と定める. 集合 Ω^* を Ω の**双対錐** (dual cone) と呼ぶ.

明らかに, Ω^* が空集合でなければ, Ω^* は凸錐である. また, Ω^* が開集合であることも分かる. すなわち Ω^* は双対空間 V^* の開凸錐である.

定義 1.3 開凸錐 Ω が**正則** (regular) であるとは, Ω が直線を含まないときをいう.

Vinberg [3] では, 正則開凸錐を単に凸錐 (convex cone) と呼んでいる. 開凸錐 Ω が正則であることは $\overline{\Omega} \cap (-\overline{\Omega}) = \{0\}$ と明らかに同値である. さらに, それらは $\Omega^* \neq \varnothing$ と同値になる. このとき, 開凸錐 Ω^* も正

則であり, ノルム空間としての自然な同一視 $V^{**} = V$ のもとで $\Omega^{**} = \Omega$ になる.
V 上の適当な内積 $(\cdot|\cdot)$ によって $V^* = V$ とみなすとき, 開凸錐 Ω のその内積に関する双対錐 Ω^* は

$$\Omega^* := \left\{ y \in V \; ; \; \text{任意の } x \in \overline{\Omega} \text{ に対して}, \; (y \,|\, x) > 0 \right\}$$

によって定義される.

定義 1.4 開凸錐 Ω が**自己双対** (self-dual) であるとは, V 上の適当な内積によって $V^* = V$ とみなすとき, $\Omega^* = \Omega$ が成り立つことをいう.

開凸錐 Ω が自己双対であるならば, 明らかに Ω は正則である.

2 等質開凸錐

Ω を有限次元実ノルム空間 V の開凸錐とし, Ω^* をその双対錐とする. V 上の一般線型群を $GL(V)$ で表す.

定義 2.1 開凸錐 Ω に対して

$$G(\Omega) := \{ g \in GL(V) \; ; \; g(\Omega) = \Omega \}$$

によって定められた $GL(V)$ の部分群を Ω の**線型自己同型群** (linear automorphism group) と呼ぶ.

群 $GL(V)$ に属する変換は V 上の線型同型であるから, $g \in GL(V)$ が $G(\Omega)$ に属することは $g(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$ と同値である. よって $G(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群であり, ゆえに $G(\Omega)$ は Lie 群になっている.

定義 2.2 開凸錐 Ω が**等質** (homogeneous) であるとは, $G(\Omega)$ が Ω に推移的に作用しているときをいう. すなわち, 任意の $x, \; y \in \Omega$ に対して, ある $g \in G(\Omega)$ が存在して $gx = y$ を満たす.

ベクトル空間 V 上の線型作用素全体を $\mathcal{L}(V)$ で表す. T^* を線型作用素 $T \in \mathcal{L}(V)$ の共役作用素とする:

$$\langle T^* \xi, \, u \rangle = \langle \xi, \, Tu \rangle \qquad (\xi \in V^*, \; u \in V).$$

また, $\mathcal{L}(V)$ の部分集合 $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{F}^* := \{ T^* \; ; \; T \in \mathcal{L}(V) \}$ とおく.
正則開凸錐 Ω に対して

$$G(\Omega^*) = G(\Omega)^* \tag{2.1}$$

が成り立つ. この式は, $g^* \in G(\Omega)^*$ が Ω^* の線型自己同型であることを意味する. 開凸錐 Ω が自己双対であるとき, ${}^tT$ を $T \in \mathcal{L}(V)$ の内積に関する転置とすれば, 式 (2.1) より $G(\Omega) = {}^tG(\Omega)$ が成り立つ. すなわち, $g \in G(\Omega)$ ならば ${}^tg \in G(\Omega)$ である. さらに, Ω が等質であれば $G(\Omega)$ の連結成分の数は有限であるから, よって $G(\Omega)$ は簡約 Lie 群になっている. この逆も成り立ち, ゆえに等質かつ自己双対な正則開凸錐 (すなわち対称錐) であるための必要十分条件は $G(\Omega)$ が簡約 Lie 群である.

3 正則開凸錐の特性函数

Ω を有限次元実ノルム空間 V の正則開凸錐とし, Ω^* をその双対錐とする.

定義 3.1 点 $x \in \Omega$ に対して

$$\varphi(x) := \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi,\, x \rangle} d\xi$$

と定める．ここで, $d\xi$ は双対空間 V^* 上の Lebesgue 測度であり, $\varphi(x) > 0$. 正則開凸錐 Ω 上の函数 φ を Ω の **特性函数** (characteristic function) と呼ぶ.

この $\varphi(x)$ を定義する積分は, Ω の任意のコンパクト部分集合に属する点 x に対して, 一様収束する．さらに特性函数 φ は C^∞ 級である．Ω 内の点列 $\{x_\nu\}_\nu$ が Ω の境界 $\partial\Omega$ 上の点 x_0 に収束するならば

$$\lim_{\nu \to \infty} \varphi(x_\nu) = \infty$$

が成り立つ．点 $x \in \Omega$ における $\log \varphi(x)$ の 2 回微分は $u,\ v \in V$ に対して

$$B_x(u,\, v) = D_u D_v \log \varphi(x)$$

によって定義される V 上の対称双線型形式 B_x である．ここで, $D_u\ (u \in V)$ は滑らかな函数 f の u 方向の微分である:

$$D_u f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x + tu).$$

このとき $0 \neq u \in V$ に対して

$$B_x(u,\, u) = D_u^2 \log \varphi(x) > 0 \tag{3.1}$$

が成り立つ．すなわち函数 $\log \varphi$ は狭義凸函数である．また上式より, 多様体 Ω の各点 x に接空間 $T_x\Omega \simeq V$ の対称双線型形式 B_x を対応させる対応 $B : \Omega \ni x \mapsto B_x \in T^*\Omega \otimes T^*\Omega$ は Ω 上に Riemann 計量を定義するから, 正則開凸錐 Ω は Riemann 多様体になる．ここで, $T^*\Omega$ は Ω の余接束である.

任意の $g \in G(\Omega)$ に対して

$$\varphi(gx) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi,\, gx \rangle} d\xi = \int_{\Omega^*} e^{-\langle g^* \xi,\, x \rangle} d\xi.$$

ここで, $\eta := g^*\xi$ とおけば $d\eta = |\mathrm{Det}\, g^*| d\xi$. よって

$$\begin{aligned} \varphi(gx) &= |\mathrm{Det}\, g^*|^{-1} \int_{\Omega^*} e^{-\langle \eta,\, x \rangle} d\eta \\ &= |\mathrm{Det}\, g|^{-1} \varphi(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

特に, $\lambda > 0$ に対して $\varphi(\lambda x) = \lambda^{-n} \varphi(x)$. ここで, $n = \dim V$ である．また上式より, Ω の Riemann 計量 B は $G(\Omega)$ 不変になる: $B_{gx}(gu,\, gv) = B_x(u,\, v)$.

4 等質正則開凸錐の双対性

ここでは, 等質正則開凸錐の双対錐も等質になっていることを述べる．Ω を有限次元実ノルム空間 V の正則開凸錐とし, Ω^* をその双対錐とする．第 1 節で述べたように, Ω^* は正則開凸錐である.

まず次が成り立つ: 全単射 $\iota : \Omega \to \Omega^*$ が存在して, 任意の $g \in G(\Omega),\ x \in \Omega$ に対して

$$\iota(gx) = (g^*)^{-1}\iota(x). \tag{4.1}$$

ここで, $g^* \in G(\Omega)^*$ は $g \in G(\Omega)$ の共役作用素である．この事実の証明には Ω の特性函数が用いられる．

次に上の事実より, 任意の $x^*,\ y^* \in \Omega^*$ に対して, ある $x,\ y \in \Omega$ が存在して $x^* = \iota(x),\ y^* = \iota(y)$ を満たす．さらに Ω が等質であれば, ある $g \in G(\Omega)$ が存在して $gx = y$ を満たす．よって, 式 (4.1) より

$$x^* = \iota(x) = \iota(g^{-1}y) = g^*\iota(y) = g^*y^*.$$

ゆえに $G(\Omega)^*$ は Ω^* に推移的に作用している．

一方, V 上の適当な内積によって $V^* = V$ とみなすとき, 式 (4.1) は

$$\iota(gx) = {}^t g^{-1}\iota(x).$$

ここで, ${}^t g \in {}^t G(\Omega)$ は $g \in G(\Omega)$ の内積に関する転置である．さらに Ω が自己双対のとき, 写像 ι は Ω の全単射である．各 $g \in G(\Omega)$ に対して $\theta(g) := {}^t g^{-1}$ とおけば, 式 (2.1) より $\theta(g) \in G(\Omega)$ が言える．明らかに $\theta^2 = I$ である．ここで, I は $G(\Omega)$ の恒等写像である．よって θ は $G(\Omega)$ の対合的自己同型写像になっている．

参考文献

[1] J. Faraut and A. Korány, “Analysis on Symmetric Cones,” Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, 1994.

[2] 志摩裕彦, “ヘッセ幾何学,” 裳華房, 2001.

[3] È. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340-403.