Achilles と亀のパラドックス

T. Nakagawa

November 25, 2007

Zeno (ゼノン) のパラドックスは幾つかあるが, その中でも有名なのが Achilles (アキレス) と亀の話である. ここではそのパラドックスを紹介する.

1 幾何級数

パラドックスの内容を数学的に議論するために幾何級数を説明しておく. 以下の説明は実数に対しても同様に成り立つ.

幾何級数とは次のように表される級数である.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots .$$

ここで, $z \in \mathbb{C}$ である. 幾何級数は $|z| < 1$ で収束し, その極限値は $1/(1-z)$ となることを見よう.

先ず, 無限級数の収束に関する判定法として, 次の複素数における Cauchy (コーシー) の判定条件がある.

定理 1.1 (Cauchy の判定条件) 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ $(\alpha_n \in \mathbb{C})$ が収束するための必要十分条件は

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{p>0} |\alpha_{N+1} + \alpha_{N+2} + \cdots + \alpha_{N+p}| = 0$$

が成り立つことである.

証明はしないが, この定理の意味は $S = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n$ としたとき,

$$S = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n + \sup_{p>0} |\alpha_{N+1} + \alpha_{N+2} + \cdots + \alpha_{N+p}| = S_N + \rho_N$$

と書けば, $N \to \infty$ のとき

$$S_N \to S \;\Leftrightarrow\; \rho_N \to 0$$

となることである.

さて, 幾何級数の第 N 部分和は

$$S_N = 1 + z + z^2 + \cdots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$$

となる. これは恒等式 $(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^N) = 1 - z^{N+1}$ から分かる. $S = 1/(1-z)$ とすれば,

$$S - S_N = \frac{z^{N+1}}{1-z}$$

である．ここで,

$$\lim_{N\to\infty}\left|z^{N+1}\right| = \lim_{N\to\infty}|z|^{N+1} = 0 \quad (|z|<1)$$

より z^{N+1} は原点へ近づく．つまり, $\lim_{N\to\infty} z^{N+1} = 0$. よって, $\lim_{N\to\infty} S_N = S$ だから

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (|z|<1)$$

となる．

2 Achilles は亀に追いつけないか？

このパラドックスは次のようなものである．

> ギリシャ神話の英雄 Achilles が亀と競争する*1. Achilles は足が速いため, そのハンディキャップとして, 地点 B にいる亀よりも距離 d だけ離れた後ろの地点 A からスタートする．時間を t として $t=0$ のとき, 両者が同時にスタートして, それぞれ一定の速さで走り始めると, Achilles は亀を追いかけ, ある時間が経つと亀が最初にいた地点 B に着く．しかし, Achilles が地点 B に着いたときには亀も走っているから, その先の地点 C へ進んでいる．次に Achilles が地点 C に着くと, 亀は地点 D に進む．このようにして, Achilles は永久に亀に追いつくことはできない．

現実では Achilles が亀に追いつくのは当然であるから, このパラドックスの誤りを幾何級数を用いて数学的に述べてみる．

亀と Achilles の速さをそれぞれ v, rv とする．ここで, $r>1$ である．Achilles が地点 B に着くのに要する時間は $t_1 = d/(rv)$ であり, この時間に亀は距離 $v \times d/(rv) = d/r$ だけ進む．さらに Achilles が地点 C に着くのに要する時間は $t_2 = (d/r)/(rv) = d/(r^2 v)$ である．このようにして, 各プロセスに要する時間を総和した時間は

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{r^n v} = \frac{d}{rv}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n} = \frac{d}{rv}\frac{1}{1-1/r} = \frac{d}{v(r-1)}$$

となり, 結局 Achilles は亀に追いつく．つまり, このパラドックスは回数の無限と時間の無限を混同していることから生じているのである．

References

[1] R. V. Churchill, J. W. Brown (中野實 訳)『複素関数入門〔原書第 4 版〕』サイエンティスト社, 1989.
[2] 神保道夫『複素関数入門』現代数学への入門, 岩波書店, 2003.
[3] 三宅敏恒『入門微分積分』培風館, 1992.

*1 但し, 両者は 1 直線上を進むとする．