映画 “Good Will Hunting” に登場する数学の問題

T. Nakagawa

April 19, 2009

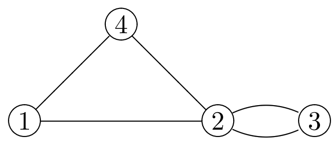
心を閉ざした天才青年 Will Hunting (Matt Damon) と, 同じく失意の中にいた心理学者との交流を描いた映画が “Good Will Hunting” である. 主演 Matt Damon と助演 Ben Affleck によるオリジナル脚本で, アカデミー脚本賞などを受賞している. この映画では数学の問題が登場するが, ここではその問題の解答を示す. 講義において, Lambeau 教授は出題の際に次のようなことを言っている[*1].

> Prof. Lambeau: I also put an advanced Fourier system on the main hallway chalkboard. I'm hoping that one of you might prove it by the end of the semester. Now the first person to do so will not only be in my good graces, but also go on to fame and fortune by having their accomplishment recorded and their name printed in the auspicious M.I.T. Tech. Former winners include Nobel laureates, Field's medal winners, renowned astrophysicists, and lowly M.I.T. professors.
> ランボー教授: 廊下の黒板にフーリエ系の問題が書いてある. 挑戦して解いてもらいたい. あれを解いた者は, よい点をもらえるだけでなく, 権威ある MIT 新聞に光栄にも名を記される. 同じ問題を解いた先輩はノーベル賞数学者, 高名な宇宙物理学者, ワビしい MIT 教授.

優秀な学生たちが悪戦苦闘する中, ただのアルバイト清掃員 Will がその難問をこっそり解いてしまう場面は印象的であった. しかし, 実際に問題を考えてみると, 実はそれほど難しくはない. 内容はグラフ理論の範囲であるが, 使う道具は主に行列の基本的知識である. また, 映画の中では Will による解答の一部を見ることができる.

それでは, 本題に入って行くことにしよう.

Problem. G is the graph



Find

1) the adjacency matrix A.
2) the matrix giving the number of 3 step walks.
3) the generating function for walks from point $i \to j$.
4) the generating function for walks from points $1 \to 3$.

Solution. 1) **隣接行列** (adjacency matrix) とは, グラフ G の頂点 i と頂点 j を結ぶ辺の本数を (i, j) 成

*1 字幕の引用である. 翻訳が少しおかしい箇所もあるが, 気にしないでおこう.

分とする行列であるから, 図のグラフ G の隣接行列 A は次のようになる:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&2&1\\0&2&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}.$$

2) 隣接行列 A の (i,j) 成分を $[A]_{ij}$ で表す. $[A^n]_{ij}$ $(n\in\mathbb{N})$ は i から j への相異なる長さ n (または n ステップ) の**歩道** (walk) の数に等しくなるので[*2], いま求める行列は A^3 で与えられる. すなわち,

$$A^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&2&1\\0&2&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&2&1\\0&2&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&2&1\\1&6&0&1\\2&0&4&2\\1&1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&2&1\\0&2&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&7&2&3\\7&2&12&7\\2&12&0&2\\3&7&2&2\end{bmatrix}.$$

3) x を不定元 (変数) とし, 数列 $\{[A^n]_{ij}\}_{n\in\{0\}\cup\mathbb{N}}$ の**母函数** (generating function) を $f(i\to j\,;\,x)$ で表す[*3]:

$$f(i\to j\,;\,x)=\sum_{n=0}^{\infty}[A^n]_{ij}\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[x^nA^n]_{ij}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^nA^n\right]_{ij}.$$

幾何級数の式 $\sum_{n=0}^{\infty}x^nA^n=(I-xA)^{-1}$ と逆行列の公式 $(I-xA)^{-1}=\operatorname{adj}(I-xA)/\det(I-xA)$ を用いれば[*4], 従って

$$\begin{aligned}f(i\to j\,;\,x)&=\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^nA^n\right]_{ij}=\left[(I-xA)^{-1}\right]_{ij}\\&=\frac{1}{\det(I-xA)}\left[\operatorname{adj}(I-xA)\right]_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}\det(I-xA)_{ji}}{\det(I-xA)}\end{aligned}$$

を得る. ここで, $(I-xA)_{ji}$ は行列 $I-xA$ の第 j 行と第 i 列を取り除いて得られる行列である.

4) $i=1,\ j=3$ に対して, 3) より

$$\begin{aligned}\det(I-xA)&=\det\begin{bmatrix}1&-x&0&-x\\-x&1&-2x&-x\\0&-2x&1&0\\-x&-x&0&1\end{bmatrix}\\&=\det\begin{bmatrix}1&-2x&-x\\-2x&1&0\\-x&0&1\end{bmatrix}+x\det\begin{bmatrix}-x&-2x&-x\\0&1&0\\-x&0&1\end{bmatrix}+x\det\begin{bmatrix}-x&1&-2x\\0&-2x&1\\-x&-x&0\end{bmatrix}\\&\quad(\because \text{第 1 行に関する余因子展開})\\&=1-4x^2-x^2+x(-x-x^2)+x(-x+4x^3-x^2)\\&=1-7x^2-2x^3+4x^4,\\\det(I-xA)_{31}&=\det\begin{bmatrix}-x&0&-x\\1&-2x&-x\\-x&0&1\end{bmatrix}=2x^2+2x^3\end{aligned}$$

[*2] n に関する帰納法で示すことができる.
[*3] 長さは $n\geq 1$ であるが, 母函数を求めるときは $A^0=I$ (4 次の単位行列) として, $n\geq 0$ を考えることに注意しよう.
[*4] $\operatorname{adj}(I-xA)$ は行列 $I-xA$ の余因子行列である.

であるから, 従って

$$f(1 \to 3\,;\,x) = \frac{(-1)^{1+3}\det(I - xA)_{31}}{\det(I - xA)} = \frac{2x^2 + 2x^3}{1 - 7x^2 - 2x^3 + 4x^4}$$

を得る. $\square$

References

[1] O. knill, *The Good Will Hunting Problem*, `http://www.math.harvard.edu/archive/21b_fall_03/goodwill/index.html`, 2003.