等質正則開凸錐と単位元を持つクラン

T. Nakagawa

2011 年 2 月 9 日

1 はじめに

- 等質正則開凸錐と単位元を持つクランの対応 (Vinberg 対応) を見通しの良い内容に改める
- 単位元を持つクランから等質正則開凸錐の構成については, Vinberg の原論文とは異なった, より直接的な道筋を与える

2 等質正則開凸錐に付随するクラン

V: 有限次元実ベクトル空間
Ω: V における**正則**開凸錐 (**直線を含まない**開凸錐)
$G(\Omega) := \{g \in GL(V)\ ;\ g(\Omega) = \Omega\}$: Ω の線型自己同型群

- Ω が**等質** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $G(\Omega) \curvearrowright \Omega$: 推移的

$u \triangle v = L_u v$: V における双線型な積 (結合法則は仮定しない)

- V が**クラン**

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1)\ [L_u, L_v] = L_{u\triangle v - v\triangle u} \\ (2)\ \exists \varpi \in V^* \text{ s.t. } \langle \varpi, u \triangle v\rangle \text{ は } V \text{ に内積を定める} \\ (3)\ \text{各 } L_u \text{ の固有値は全て実数} \end{cases}$$

- 線型形式 $\varpi \in V^*$ が**認容** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ϖ が条件 (2) を満たす

Vinberg の方法:

- n 次元実アファイン空間における等質正則凸領域を経由
- $n+1$ 次元実ベクトル空間における等質正則開凸錐からクランを構成

$\Rightarrow$ 開凸錐だけを扱うのであれば，議論の展開が煩雑

本研究の方法:

- 凸領域を実ベクトル空間 V における開凸錐とし，V に直接クラン構造を入れる

定理 1 (Vinberg)

$G(\Omega)^\circ \supset \exists$ 極大連結三角化可能群 $H \curvearrowright \Omega$: 単純推移的

任意の点 $E \in \Omega$ をとって固定
定理 1 より，軌道写像 $H \ni h \mapsto h \cdot E \in \Omega$: 微分同相
H の単位元における微分
$\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H) \ni X \mapsto XE \in T_E\Omega \leftrightarrow V$: 線型同型
$L : V \ni u \mapsto L_u \in \mathfrak{h}$: 微分の逆写像 ($L_uE = u$)
$u \triangle v := L_uv$ ($\triangle$ は双線型な積) $\rightsquigarrow$ V は E を単位元とする
クラン

3 クランに付随する等質正則開凸錐

V: 単位元 E を持つクラン
ϖ: V 上の認容線型形式
$\mathfrak{h}$: V 上の左かけ算作用素 L_u たちから成る Lie 代数 (三角化可能)
$H := \exp \mathfrak{h}$: Lie 代数 $\mathfrak{h}$ に対応する Lie 群

Vinberg の方法:

- H 軌道 $H \cdot E$ が等質正則開凸錐になるという証明は，あまり直接的とは言えないし，論理の飛躍もある
- 錐を持ち出してクランを正規分解

本研究の方法:

- クランの正規分解を代数的方法だけでより直接的に行う
- 正規 j 代数を用いた Rossi と Vergne の論文の証明を基に，正規 j 代数を経ずに直接クランの言葉で書き直す

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{R}E_i \oplus \bigoplus_{j>i} V_{ji}, \quad E = \sum_{j=1}^{r} E_j$$: クラン V の正規分解

$$\begin{cases} E_i \triangle E_j = \delta_{ij} E_i \quad (i,\ j = 1, \ldots, r), \\ V_{ji} = \left\{ u \in V \ ;\ E_k \triangle u = \frac{1}{2}(\delta_{kj} + \delta_{ki})u,\ u \triangle E_k = \delta_{ki} u \right\} \\ (1 \leq i < j \leq r) \end{cases}$$

$\mathfrak{a} := \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{R}L_{E_i}$: $\mathfrak{h}$ の可換部分 Lie 代数

$\mathfrak{n} := \sum_{j>i} \mathfrak{n}_{ji}$: $\mathfrak{h}$ の冪零部分 Lie 代数

$(\mathfrak{n}_{ji} := \{ L_u \in \mathfrak{h} \ ;\ u \in V_{ji} \})$

$A := \exp \mathfrak{a},\ N := \exp \mathfrak{n}$: それぞれの Lie 代数に対応する Lie 群

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{n}, \quad H = A \ltimes N$$

H 軌道 $\Omega := H \cdot E \rightsquigarrow \Omega$ は等質正則開凸錐

凸性の証明:
H の開軌道 $H \cdot \varpi$ に対して,

$$(H \cdot \varpi)^{\dagger} := \left\{ x \in V \ ; \ \langle \xi, x \rangle > 0, \ \forall \xi \in \overline{H \cdot \varpi} \setminus \{0\} \right\}$$

集合 $(H \cdot \varpi)^{\dagger}$ は開凸錐であり, $\Omega \subset (H \cdot \varpi)^{\dagger}$
式 $(H \cdot \varpi)^{\dagger} = \Omega$ を証明することで Ω の凸性が示される

次の函数を導入:

$$\psi(x) := \int_{H\cdot\varpi} e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi \qquad (x \in V)$$

$d\xi$: V^* **上の Lebesgue 測度**

- $x \in (H\cdot\varpi)^\dagger \Rightarrow \psi(x) < \infty$
- $(H\cdot\varpi)^\dagger$ **上で** $\log\psi$ **は狭義凸函数**

$\{x_\nu\}_\nu$: Ω **内の点列**
$\partial\Omega$: Ω **の境界**
そして $\Omega \ni x_\nu \to x_0 \in \partial\Omega$ $(\nu \to \infty)$ **とすれば,**

$$\psi(x_\nu) \to \infty \qquad (\nu \to \infty)$$

よって $(H\cdot\varpi)^\dagger \setminus \Omega = \varnothing$

定理 2

$\boldsymbol{H}$ **軌道**

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{E} = \{(\exp \boldsymbol{L_u}) \cdot \boldsymbol{E} \ ; \ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}\} = \exp \boldsymbol{V}$$

は等質正則開凸錐である

4 Vinberg 対応

- **等質正則開凸錐と単位元を持つクランは 1 対 1 に対応**