

1. 目的

常微分方程式の数値解析法 (Runge-Kutta 法) について理解し, これを応用したデジタルシミュレーションを用いて種々の動的現象をコンピュータ上で実験的に検討する.

2. コンピュータシミュレーション

(1) シミュレーション

一般にモデルを用いてシステムの挙動を実験的に解析する手法の事を指す (広義) から, 工学実験で取り扱う光弾性実験などもシミュレーションの一種といえる. しかし, コンピュータの発達と普及により, 最近ではコンピュータの助けを借りた手法, すなわち, コンピュータ上にモデルを組み立て, その挙動を解析する手法が一般的となってきた, これを特に計算機採用シミュレーション, コンピュータシミュレーション (Computer Aided Simulation), ハイブリッドシミュレーション (hybrid simulation) に分けられる.

(2) シミュレーションの有用性

システムの挙動を記述する関係式が非線形であったり, 時変係数を含むような場合には, システムの挙動を知るために関係式を解析的に解く事がほとんどできない. また, 定係数, 線形系の場合でも関係式は高次高階のときには解析解が存在しても現実には求める事は難しい. シミュレーションは, このような場合に系の挙動を調べる簡便で有用な方法である. ただし, システムの一般的な挙動 (関係式の一般解) を知るにはシステムパラメータ (関係式の係数) や初期条件, 境界条件を変化し, これらの種々の組み合わせの下で多数回のシミュレーションを実行しなければならない.

3. デジタルシミュレーションの手法

デジタルシミュレーションとは, 言い替えればデジタル計算機を用いてシステムの挙動を記述した関係式 (モデル式 model equations) の数値解を求める事に他ならない. 動的システムの挙動は一般に微分方程式で記述されるから, モデル式は次のような一般形で表わす事ができる.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

(注) このような形式の関係式を一般に状態方程式とよぶ. また, $x(t)$ を状態変数, $u(t)$ を入力変数とよぶ. 例えば,

1. 「R-C 直列回路の動特性」の実験で取り扱うモデル式

$$RC\dot{e}_o(t) + (R/r + 1)e_o(t) = e_i(t) \quad (2)$$

は状態方程式の形式に書けば, 次のように書ける.

$$\begin{aligned} \dot{e}_o(t) &= \frac{1}{RC} \{ -(R/r + 1)e_o(t) + e_i(t) \} \\ &= f(e_o(t), e_i(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

2. 「減衰をもつ一自由度系の強制振動」の実験で取り扱うモデル式

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (4)$$

の場合には, $\dot{x}(t) = y(t) = f_1(y(t))$ (5) の関係を満たす. 状態変数 $y(t)$ を新たに用いると,

$$m\dot{y}(t) + cy(t) + kx(t) = F(t)$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち, } \dot{y}(t) &= \frac{1}{m}\{F(t) - cy(t) - kx(t)\} \\ &= f_2(y(t), x(t), F(t)) \end{aligned} \quad (6)$$

したがって, (4) 式は (5) 式, (6) 式からなる連立状態方程式の形で記述することが出来る.

(1) オイラーの方法

(1) 式で記述されるシステムの時間間隔 $t_0 < t < t_k$ におけるシミュレーション (連続的な時間刻みに対する数値近似) の手法を考えてみよう.

上記時間間隔における時刻 t_i ($0 < i < k$) における状態変数値 $x_i = x(t_i)$ と $u(t)$ の値 $u_i = u(t_i)$ が既知であれば, (1) 式から時刻 t_i における微係数 $\dot{x}(t_i)$ を知る事ができる.

$$\text{すなわち, } \dot{x}_i = \dot{x}(t_i) = f(x_i, u_i) \quad (7)$$

一般に微分方程式を数值的に解くには, 微分量 dx/dt を差分商 $\Delta x/\Delta t$ で近似して取り扱う.

$$\text{微分の定義 } \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (8)$$

から分かるように x が連続的に変化するならば微量 Δt が充分小さいほど近似の程度はよい.

今, 図 1 に示すように時刻 t_i における微小時間 Δt_i と微小増分 Δx_i を用いて微分を差分商で近似すれば, (7) 式より次の関係を得る.

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} = f(x_i, u_i) \quad (9)$$

$$\Delta x_i = f(x_i, u_i)\Delta t_i \quad (10)$$

(10) 式の関係を用いて時刻 t_i における状態 (x_i, u_i) から, 次の時刻 t_{i+1} ($= t_i + \Delta t_i$) における状態変数の近似値を知る事ができる.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}(t_{i+1}) &= x_i + \Delta x_i \\ &= x_i + f(x_i, u_i)\Delta t_i \end{aligned} \quad (11)$$

したがって, 状態変数の初期値 x_0 ($= x(t_0)$) と各時刻における入力変数値 u_i ($i = 0, 1, 2, \dots, k$) が既知であれば, (11) 式の数値計算を $i = 0$ から $i = k - 1$ まで順に繰り返す事により連続的な時間刻み t_1, t_2, \dots, t_k における状態変数値 x_1, x_2, \dots, x_k を順次近似的に求める事ができる ((1) 式に数値解が得られる).

これは微分方程式の初期値問題を数值的に解く最も基本的な手法で, オイラーの方法と呼ばれる. 図 1 に見るように, Δt_i が充分小さい場合には近似誤差 Δe ($= x(t_{i+1}) - x_i - \Delta x_i$) も小さくなる事が理解できる (Δe は Δt_i^2 程度になる).

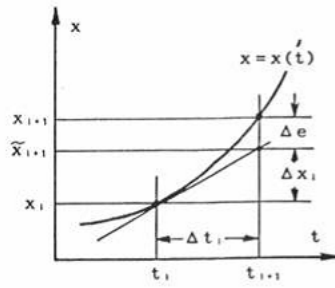


図 1

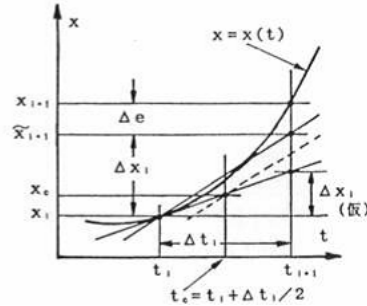


図 2

(2) ルンゲークッタの方法

オイラーの方法では (t_i, x_i) における微係数 x_i を利用して Δt_i 先での x の増分を Δx_i と近似するのでどうしても誤差が大きい。特に所要の時間生きでの解を求めるには連続的な時間刻みの繰り返し計算が必要で、この誤差が累積していくからできるだけ精度良く数値近似する事が望まれる。この観点から多くの研究者により種々の手法が研究、提案されている。その代表的な一つがルンゲークッタの方法である。ルンゲークッタ法の原理は複雑であるため、公式のみを示す。

$$k_1 = f(x_i, u_i) \Delta t_i \quad (17)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}k_1, u_c) \Delta t_i \quad (18)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}k_2, u_c) \Delta t_i \quad (19)$$

$$k_4 = f(x_i + k_3, u_{i+1}) \Delta t_i \quad (20)$$

$$\Delta x_i = (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \therefore \tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}(t_{i+1}) &= x_i + \Delta x_i \\ &= x_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6 \end{aligned} \quad (23)$$

(1) 式で記述されるシステムでは、 $x_i, u_i, u_{i+1}, \Delta t_i$ が既知であれば（できれば u_c も既知であれば (14) 式による近似が不要で精度も向上する）、(17) 式から順次計算を進め、得られた係数を次の計算に利用する事により x_{i+1} を求める事ができる。

4. 実験の課題

(1) (2) 式のモデル式で記述される R-C 直列回路のインディシャル応答をシミュレーションせよ。

$$t < 0 \text{ のとき } e_i(t) = 0, \quad t \geq 0 \text{ のとき } e_i(t) = 3$$

得られた解からこの系の時定数を求め、計算値と比較せよ。（時定数については実験指導書「R-C 直列回路の動特性」を参照せよ。）

(2) 課題 1 のシステムについて方形波入力に対する応答をシミュレーションし、比較せよ。

(3) (4) 式のモデル式で記述される一自由度の強制振動形の周波数応答をシミュレーションせよ。

$$F(t) = 10 \sin \omega t, \quad \omega [\text{rad/s}] = 2\pi f \quad (5)$$

F [Hz] を種々に変化した場合の定常振幅（無次元の振幅比）をシミュレーション結果から求めて、周波数応答図を描き解析結果（実験指導書「減衰を持つ 1 自由度系の強制振動式 ((11) 参照) と比較せよ。

- (4) 課題 3 において計算時間刻みを大きくして行くとシミュレーション結果はどうか。試行してみよ。限界の時間刻みはどの程度か。 $f = 1$ [Hz] とし、適切な時間刻みから 0.1 [s] ずつ増加させてみよ。

5. 実験結果

- (1) 図 3, 図 4 に示す dt を変化させた場合のそれぞれの R-C 直列回路の動的挙動のシミュレーション結果から、時定数を求め、コンピュータによって得られた結果と比較する。

図 3 から、時定数 T は収束する値の 63.2 % の時の t の値を読んで Δt をかけてやれば良い。よって、63.2 % の位置の t を読むと 10.64 より、

$$T = 10.64 \times 0.6 = 6.384 \text{ s}$$

コンピュータが求めた値は $T = 6.6667 \text{ sec}$ であるから、誤差は 4.2 % となる。

同様にして、図 4 の時定数 T は $T = 6.596 \text{ sec}$ 。コンピュータが求めた値は $T = 6.6667 \text{ sec}$ であるから、誤差は 1.1 % となる。

以上より、 Δt の値を小さくすればより精度の高い結果が得られることが分かる。

- (2) 図 5 は図 3 や図 4 のインディシャル応答のグラフが上下反転しながら繰り返していることが分かる。これは方形波が正と負のインディシャル応答を周期的に繰り返していると見ることができ、図 3 や図 4 のように収束するのに一定の時間がかかるので、その収束の途中でインディシャル応答の正負が変わると、また逆方向に収束しようとするためこのようなこぎり型の波形になると考えられる。
- (3) まず各周波数で測定した結果について表 1 にまとめて以下に示す。

表 1 1 自由度強制振動系周波数応答シミュレーション結果

Data No.	1	2	3	4	5	6	7
f [Hz]	0.3000	0.5000	0.7000	0.9000	1.0000	1.0500	1.1000
T_n [sec]	1.0988	1.0988	1.0988	1.0988	1.0988	1.0988	1.0988
T [sec]	3.3333	2.0000	1.4286	1.1111	1.0000	0.9524	0.9091
ω/ω_n	0.3296	0.5494	0.7691	0.9889	1.0988	1.1537	1.2087
x_a/x_s	1.0714	1.2857	1.5429	1.7143	1.4314	1.3286	1.2857
x_a/x_{st} (理論値)	1.0953	1.2952	1.6227	1.6842	1.4469	1.3032	1.1638

例として以下に周波数 0.3 Hz でシミュレーションした場合の結果を図 6 に示す。

周波数を変化させて図 6 のように順次得られるそれぞれのグラフから振幅比を定規で測定する。理論値は以下に示す式を変形すると求められる。 x_a : 振幅, x_{st} : 静的変位として、

$$x_a = x_{st} \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\gamma^2 \lambda^2}}$$

以上のことから得た結果を用いて周波数応答図を図 7 に示す。

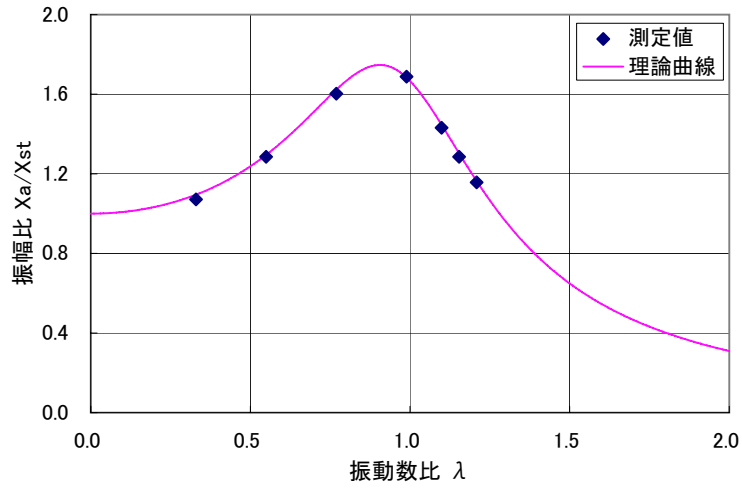


図2 周波数応答図

図を見ると、実験は理論通りの結果となっている。

(4) 課題4の各計算時間刻みで得られた結果を以下の表3にまとめる。

表2 各時間刻み Δt でのシミュレーション結果

Date No.	1	2	3	4	5
Δt	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
x_a/x_{st}	1.3714	1.2000	0.8571	0.5143	測定不能

次に時間刻み Δt と振幅比 x_a/x_{st} との関係を図に示す。

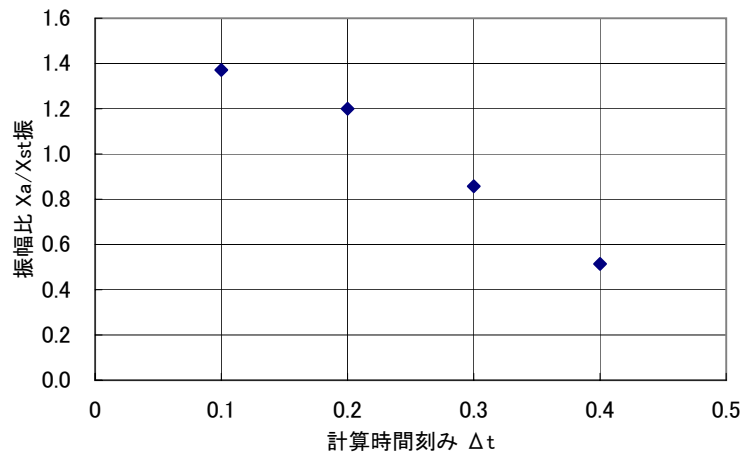


図3 計算時間刻みと振幅比の関係

6. 考察

様々な動的現象をコンピュータ上でデジタルシミュレーションすることによって、手間や時間のかかる実験結果を容易に得ることができることがわかった。しかも初期条件を変更するだけで様々な条件、様々な系の実験結果を得られた。

今回の実験では理論どおりの結果となり特に考察する点はない。ただ、シミュレーションは便利ではあるが、そのプログラム自体を組むには実際に実験した結果や理論などに熟知してなければ作ることができず、また課題4のような現象についても理解してなければ使うことさえままならないので、注意して使用しなければならない。