1. **目的**

目測で一定長を目指し，テープを順次連続してハサミで切っていくとき，その枚数の結果から何か法則的なことを見出そうとする．目測には常に誤差を伴い，自分の目測がどのくらい偏差をもつかを知っておく必要がある．また，同じ測定が繰り返され時間的な系列をなす場合，測定値の偏差が測定者にフィードバックされる場合とされない場合とで，結果がどのように異なるか調べる．

2. **原理**

一般的に計測には誤差が伴い，目標値（真の値）の周辺でデータは分散する．このようなデータのばらつきは正規分布に従うことが知られている．確率変数 x が平均値 μ と標準偏差 σ をもって正規分布に従うとき，その確率密度 $f(x)$ は次式で表される．

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\{(x-\mu)/\sigma\}^2} \tag{1}$$

確率密度 $f(x)$ に dx を乗じた次式が x の値を示す確率を表す．

$$f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\{(x-\mu)/\sigma\}^2} dx \tag{2}$$

ここで，$u = (x-\mu)/\sigma$ とおけば，$du = dx/\sigma$ となって，（2）式は

$$f(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \tag{3}$$

となる．この式は平均値 0，標準偏差 1 の正規分布と呼ばれる．この式より（$\mu + 3\sigma$）から（$\mu - 3\sigma$）の範囲で 99.8% のデータを含むことが分かる．

以上の理論的考察より，正規分布に従ってバラツキを持つ N 個の測定値に対し x_i の値が出る度数（頻度，回数）を f_i とすると，

$$\text{平均値} \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i f_i \tag{4}$$

$$\text{標準偏差} \quad s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2 f_i} \tag{5}$$

が考えられ，一般的に $\bar{x} - 3s$, $\bar{x} + 3s$ の区間に殆どのデータが収まるはずである．

実際のデータにおいて，測定結果の標準偏差 s がやむを得ないバラツキであるかどうかを調べるために（$\bar{x}$, R）チャートを用いる．一群のデータから n 個ずつを抽出して，k 個のサンプルを作る．各サンプル内の平均値を $\bar{x}$，最大値と最小値との差（範囲）を R とする．

<u>$\bar{x}$ - チャート</u>

サンプル間の変動が安定であるかどうかをチェックするために用いるチャートである．全データの総平均値を $\bar{\bar{x}}$，標準偏差を σ とするとき，

$$\text{上部管理限界（UCL）} \bar{\bar{x}} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$$

$$\text{下部管理限界（LCL）} \bar{\bar{x}} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$$

となる．ここで，$\bar{R}$ は各サンプルの R の平均値である．また，A_2 の値はサンプル内のデータ個数 n に応じて定まる．限界線は平均値の分布を考えた際，上下に標準偏差の 3 倍に相当する値を示しているに他ならない．限界線の中にプロットが収まっているとき安定状態であるといい，限界線の外に外れる場合を管理外れと呼び，不安定であることを示す．

<u>R - チャート</u>

サンプル内の変動が安定であるかどうかをチェックするために用いるチャートである．この場合，各サンプルの R の標準偏差を s_R とするとき，

$$\text{上部管理限界（UCL）} \bar{R} + 3s_R = D_4\bar{R}$$

$$\text{下部管理限界（LCL）} \bar{R} - 3s_R = D_3\bar{R}$$

となる．ここで，D_3，D_4 は n に応じて定まる．

（$\bar{x}$, R）チャートがともに安定状態であれば，最初に求めた $\bar{x}$ と s は信頼がおける．しかし，（$\bar{x}$, R）チャートが不安定な場合は管理外れの原因を追求し，その原因を除去して安定状態に持ち込むことが大切である．

3. **使用器具**

標準テープ （長さ 10[cm]），紙テープ，はさみ，物差し

4. **実験方法**

定長 10[cm] の標準テープを目測しやすい一定位置におき，それを参考として 1 人が紙テープを台の上で目測により端から 10[cm] の長さに切る．

他の 1 人はそれを受け取り，順次番号をふり，物差しで長さを計り，テープに書き込む．これを A 法と B 法の 2 種類の方法で行う．

・A 法：100 枚連続して上記のとおり行う．

・B 法：5 枚ごとに測った長さを聞きながら 100 枚切っていく．A 法，B 法それぞれ切った順序に長さの測定値を x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{100} とする．（注意）テープを切るとき，標準テープと約 30[cm] 離れた定位置で紙テープを切ること．

5. **結果**

(a) A 法について

i. 1 から 100 番までの結果を表 1 のように 1 行目から x_1, x_2, $\cdots$, x_5 の順番で整理する．

ii. 表 1 の各列の最大値（L），最小値（S）を表 2 のように記入する．

表 1

1	2	3	4	5
91	87	84	89	88
90.5	97	91.5	90	99.5
101	88	94	92	96.5
98	100	97	101	104
97	95.5	98	102	111.5
102.5	104	105	106	98
99	110.5	99.5	105	103.5
97.5	104.5	113.5	104	96
97.5	96	93.5	99.5	105
105	100.5	100	99	102.5
97.5	100.5	93	109	104
98	99.5	94.5	94	100
95	98	97.5	100.5	94.5
94	90	88	87	95
88	90.5	91	97	86
96	98	98.5	98.5	95
98	94	93	96	102
90	89.5	90	86	98.5
94.5	93	91	88	97.5
97.5	90.5	94	90	96

表 2

	1	2	3	4	5
L	111.5	110.5	113.5	109	111.5
S	88	87	84	86	86

iii. 全データについての最大値（L_T），最小値（S_T）を表 2 から求める．

iv. $R_T = L_T - S_T$ を求める（全範囲）．
$L_T = 113.5$[mm]，$S_T = 84.0$[mm] より，
$\therefore R_T = 113.5 - 84.0 = 29.5$[mm]

v. $R_T/10 = C$ を求める（10 個のクラスに割り振る場合）．
$R_T = 29.5$[mm] より，
$\therefore C = R_T/10 = 29.5/10 = 2.95$[mm] $\fallingdotseq 3$[mm]
この値は 100 個のデータを 8〜15 個程度のクラスに割り振るためのクラスの幅である．C の値としては上式で求まった値より適当な値を近似してよい．

vi. L_T，S_T を含むようにクラスの数を決める．
今回はクラスの数を 10 とする．

vii. 各クラスにデータを割り振ってゆく（度数分布）．表 3 を参照．

表 3

No.	クラス	クラス中央値 x_i	度数 f_i
1	84～87	85.5	2
2	87～90	88.5	10
3	90～93	91.5	13
4	93～96	94.5	16
5	96～99	97.5	26
6	99～102	100.5	14
7	102～105	103.5	10
8	105～108	106.5	5
9	108～111	109.5	2
10	111～114	112.5	2
			100

viii. ヒストグラム（柱状図形）の作成，表 3 の結果より，図 1 に示すヒストグラムを作成し，データの分布の様子を把握する．

ix. 式（4），（5）より平均値と標準偏差を求める．

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{10} x_i f_i \quad \text{より，} \\
&= \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10} x_i f_i \\
\therefore\ \bar{x} &= 96.67[\mathrm{mm}]
\end{aligned}
$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 f_i} \quad \text{より,}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 96.67)^2 f_i}$$
$$\therefore \; s = 5.97[\mathrm{mm}]$$

x. 下記の範囲にデータの何 % が入るかを確かめる．

（1）$\bar{x} \pm s = 96.67 \pm 5.94 = 102.61,\ 90.73$

表 5 より，$(13 + 16 + 26 + 14)/100 \times 100 = 69\%$

（2）$\bar{x} \pm 2s = 96.67 \pm 2 \times 5.94 = 108.55,\ 84.79$

同様にして，$98/100 \times 100 = 98\%$

（3）$\bar{x} \pm 3s = 96.67 \pm 3 \times 5.94 = 114.49,\ 78.78$

同様にして，$100/100 \times 100 = 100\%$

xi. 1〜100 番までのデータを表 4 のように整理する．

表 4

Sam.No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	91	90.5	101	98	97	102.5	99	97.5	97.5	105
	87	97	88	100	95.5	104	110.5	104.5	96	100.5
$n = 5$	84	91.5	94	97	98	105	99.5	113.5	93.5	100
	89	90	92	101	102	106	105	104	99.5	99
	88	99.5	96.5	104	111.5	98	103.5	96	105	102.5
和 T	439	468.5	471.5	500	504	515.5	517.5	515.5	491.5	507
平均 $\bar{x}$	87.8	93.7	94.3	100	100.8	103.1	103.5	103.1	98.3	101.4
範囲 R	7	9.5	13	7	16	8	6	17.5	11.5	3.5

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
97.5	98	95	94	88	96	98	90	94.5	97.5
100.5	99.5	98	90	90.5	98	94	89.5	93	90.5
93	94.5	97.5	88	91	98.5	93	90	91	94
109	94	100.5	87	97	98.5	96	86	88	90
104	100	94.5	95	86	95	102	98.5	97.5	96
504	486	485.5	454	452.5	486	483	454	464	468
100.8	97.2	97.1	90.8	90.5	97.2	96.6	90.8	92.8	93.6
16	6	6	8	9	3.5	9	4	9.5	6

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}\bar{x}_i = 96.67 \quad , \quad \bar{R} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}R_i = 8.8$$

xii. $\bar{\bar{x}}, \bar{R}$ の UCL と LCL を求め，図 2 のような（$\bar{x}, R$）チャートを求める．

・$\bar{x}$ について

UCL$= \bar{\bar{x}} + 0.577\bar{R} = 96.67 + 0.577 \times 8.8 = 101.75$

LCL$= \bar{\bar{x}} - 0.577\bar{R} = 96.67 - 0.577 \times 8.8 = 91.59$

・R について

UCL$= 2.115\bar{R} = 2.115 \times 8.8 = 18.61$

LCL$= 0$

(b) B 法について

i. 1 から 100 番までの結果を表 5 のように 1 行目から x_1，x_2，$\cdots$，x_5 の順番で整理する．

ii. 表 4 の各列の最大値（L），最小値（S）を表 6 のように記入する．

iii. 全データについての最大値（L_T），最小値（S_T）を表 6 から求める．

iv. $R_T = L_T - S_T$ を求める（全範囲）．

$L_T = 108.0$[mm]，$S_T = 88.0$[mm] より，

$\therefore R_T = 108.0 - 88.0 = 20.0$[mm]

v. $R_T/10 = C$ を求める（10 個のクラスに割り振る場合）．

$R_T = 20.0$[mm] より，

$\therefore C = R_T/10 = 20.0/10 = 2.00$[mm] $\fallingdotseq 3$[mm]

vi. L_T，S_T を含むようにクラスの数を決める．

今回はクラスの数を 10 とする．

vii. 各クラスにデータを割り振ってゆく（度数分布）．表 7 を参照．

表 5

1	2	3	4	5
89	91	88	90	94
100.5	101	97	98	102
96.5	97.5	97.5	98.5	95
98.5	100	100	97.5	103
98.5	97.5	95.5	94.5	94
102	99.5	99.5	97	106
98	95.5	99.5	93.5	95
95	93	93	95.5	98
91.5	90	93.5	101.5	96
90.5	94	92.5	91	98
94.5	93	90.5	97.5	90
102	98	94	96.5	95
93	94	95	97	97
98	94	94	94	98
92	98	91.5	98	99
92	98	96.5	101	102
101.5	100	93	88	94
103	99	108	103	99
105	101.5	102.5	96.5	94.5
94	102.5	104.5	103	104

表 6

	1	2	3	4	5
L	105	102.5	108	103	106
S	89	90	88	88	90

表 7

No.	クラス	クラス中央値 x_i	度数 f_i
1	84〜87	85.5	0
2	87〜90	88.5	3
3	90〜93	91.5	12
4	93〜96	94.5	21
5	96〜99	97.5	28
6	99〜102	100.5	15
7	102〜105	103.5	13
8	105〜108	106.5	2
9	108〜111	109.5	1
10	111〜114	112.5	0
			100

viii. ヒストグラム（柱状図形）の作成，表 7 の結果より，図 3 に示すヒストグラムを作成し，データの分布の様子を把握する．

ix. 式（4)，（5）より平均値と標準偏差を求める．

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{10} x_i f_i \quad \text{より} \\
&= \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10} x_i f_i \\
\therefore \ \bar{x} &= 96.83[\mathrm{mm}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s &= \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 f_i} \quad \text{より，} \\
&= \sqrt{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 96.83)^2 f_i} \\
\therefore \ s &= 4.21[\mathrm{mm}]
\end{aligned}
$$

x. 下記の範囲にデータの何 % が入るかを確かめる．

（1）$\bar{x} \pm s = 96.83 \pm 4.21 = 101.04,\ 92.62$

表 7 より，$69/100 \times 100 = 69\%$

（2）$\bar{x} \pm 2s = 96.83 \pm 2 \times 4.21 = 105.25,\ 88.41$

同様にして，$97/100 \times 100 = 97\%$

（3）$\bar{x} \pm 3s = 96.83 \pm 3 \times 4.21 = 109.46,\ 84.20$

同様にして，$100/100 \times 100 = 100\%$

表 8

Sam.No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	89	100.5	96.5	98.5	98.5	102	98	95	91.5	90.5
	91	101	97.5	100	97.5	99.5	95.5	93	90	94
$n=5$	88	97	97.5	100	95.5	99.5	99.5	93	93.5	92.5
	90	98	98.5	97.5	94.5	97	93	95.5	101.5	91
	94	102	95	103	94.5	106	95	98	96	98
和　T	452	498.5	485	499	480.5	504	481	474.5	472.5	466
平均　$\bar{x}$	90.4	99.7	97	99.8	96.1	100.8	96.2	94.9	94.5	93.2
範囲　R	6	5	3.5	5.5	4	9	6	5	8	7

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
94.5	102	93	98	92	92	101.5	103	105	94
93	98	94	94	98	98	100	99	101.5	102.5
90.5	94	95	94	91.5	96.5	93	108	102.5	104.5
97.5	96.5	97	94	98	101	88	103	96.5	103
90	95	97	98	99	102	94	99	104	104
465.5	485.5	476	478	478.5	489.5	476.5	512	509.5	508
93.1	97.1	95.2	95.6	95.7	97.9	95.3	102.4	101.9	101.6
7	8	4	4	8.5	10	13.5	9	8.5	10

xi. 1〜100 番までのデータを表 8 のように整理する.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}\bar{x}_i = 96.83 \quad , \quad \bar{R} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} R_i = 7.08$$

xii. $\bar{\bar{x}}, \bar{R}$ の UCL と LCL を求め，図 4 のような（$\bar{x}, R$）チャートを求める.

・$\bar{x}$ について

UCL$= \bar{\bar{x}} + 0.577\bar{R} = 96.83 + 0.577 \times 7.08 = 100.92$

LCL$= \bar{\bar{x}} - 0.577\bar{R} = 96.83 - 0.577 \times 7.08 = 92.74$

・R について

UCL$= 2.115\bar{R} = 2.115 \times 7.08 = 14.97$

LCL$= 0$

6. 考察

図 2，4 より A 法，B 法ともに $\bar{x}$ - チャートでは管理外れがあり，不安定な時があった．A 法では最大の管理外れはサンプル番号 1 の時で，LCL より 4.14% 小さかった．B 法の管理外れはサンプル番号 18 の 1 つだけで UCL より 1.47% 大きかった．B 法では管理外れが A 法より少ないため，測定値の偏差が測定者にフィードバックされたことがよく分かる．また R - チャートでは A 法，B 法ともに安全状態であった．これは測定者が切ったテープの長さはそれほど大きな変化がないことを示している．さらに B 法の（$\bar{x}, R$）チャートが A 法と比べて変動が緩やかなのは，測定者にフィードバックされたためであると考えられる．