

## 1. 目的

長さの等しい2本の糸で物体を吊るし、その重心を通る鉛直軸の周りに回転振動をさせ、周期を測定することで物体の重心を通るZ軸周りの慣性モーメントを算出する。

## 2. 原理

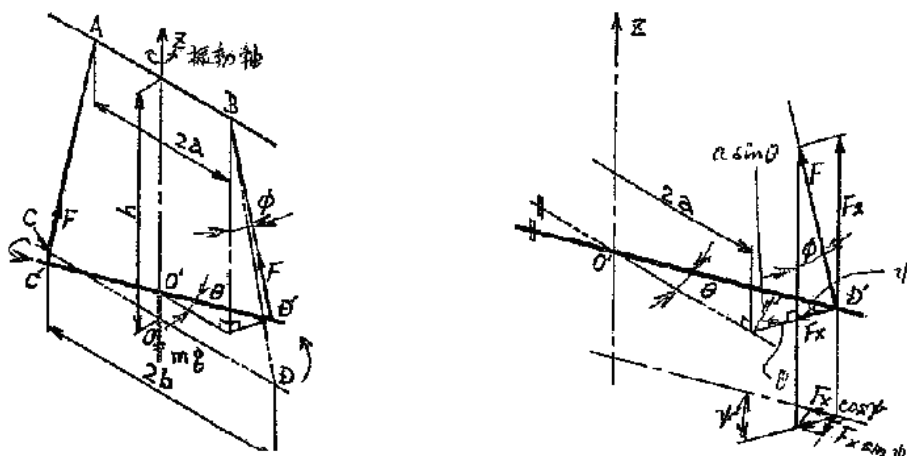


図1 実験装置及び実験装置に働く力

- (1) 図1のように記号を定める。
- (2) 物体はC, Dで静止の状態にある。
- (3) これに回転振動を与えるとC, DとC', D'が角 $\theta$ をなす。今、糸の張力を $F$ 、その鉛直方向の分力を $F_z (= F \cos \theta)$ とすると、物体の鉛直方向に生じる運動(上下運動)は次の運動方程式が成り立つ。

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = 2F_z - mg \quad (1)$$

次に、 $F$ の水平分力 $F_x (= F \sin \theta)$ において、物体の軸方向 $O', D'$ への $F_x$ の分力 $F_x \cos \psi$ は、棒の他端 $O', C'$ 方向に働く同種の力と釣り合う。一方、軸方向 $O', D'$ に直交する $F_x$ の分力 $F_x \sin \psi$ は、棒の他端に作用する同種の力と共に、物体に偶力として作用する。この時の棒に作用するモーメント $M$ の大きさは、次式により算出される。

$$M = F_x \sin \psi \times 2b \quad (2)$$

ここで、図1より明らかのように、

$$F_x = F_z \tan \phi$$

$$\tan \phi = \frac{D'D''}{BD''}, \quad \sin \psi = \frac{a \sin \theta}{D'D''}$$

なる関係式が成立し、また (1) 式を変形すると、

$$F_z = \frac{1}{2} \left( g + \frac{d^2 z}{dt^2} \right) m \frac{\sin \theta}{BD''} \quad (3)$$

となる。ここで  $d^2 z/dt^2 \doteq 0$  ,  $BD'' \doteq h$  ,  $\sin \theta \doteq \theta$  とすると、上式は

$$M = \frac{abmg}{h} \theta \quad (4)$$

となる。この物体の Z 軸周りの回転運動における運動方程式は以下のようなになる。

$$I_z \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -M = -\frac{abmg}{h} \theta \quad (5)$$

この運動方程式 (微分方程式) を解くと、その解は

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{abmg}{I_z h} \theta = 0, \quad \theta = A \cos \left( \sqrt{\frac{abmg}{I_z h}} t + \alpha \right)$$

となる ( $A, \alpha$  は初期条件によって定まる定数である)。解の式から分かるように、 $\theta$  は時間  $t$  の周期関数であり、その周期  $T$  は次式より求まる。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z h}{abmg}} \quad \text{つまり} \quad I_z = \frac{abmgT^2}{4\pi h} \quad (6)$$

以上のことから、物体に回転振動を与えその周期  $T$  を測定し、併せて長さ  $a, b, h$  と質量  $m$  を測定することで、物体の慣性モーメント  $I_z$  を算出することができる。

今回実験で使用する、断面形状及び密度が均一な質量  $m$  の円筒物体における X 軸及び Z 軸周りの慣性モーメント  $I_x$  及び  $I_z$  の算出式を次に示す。

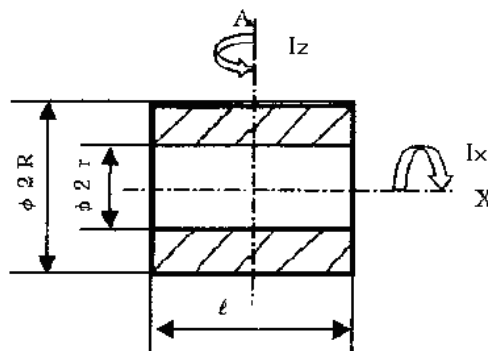


図 2 円筒物体と座標軸

$$I_x = m \frac{R^2 + r^2}{2}, \quad I_z = m \left( \frac{l^2}{12} + \frac{R^2 + r^2}{4} \right) \quad (7)$$

### 3. 実験装置

二本吊り (試料を 2 本のピアノ線で懸垂したもの, 図 3 参照), ノギス, 巻尺, 天秤, ストップウォッチ

### 4. 実験方法

(1) 試料 A, B, C の質量とそれぞれの外径, 内径, 及び長さ  $2a$ ,  $2b$ ,  $l$  を測定する.

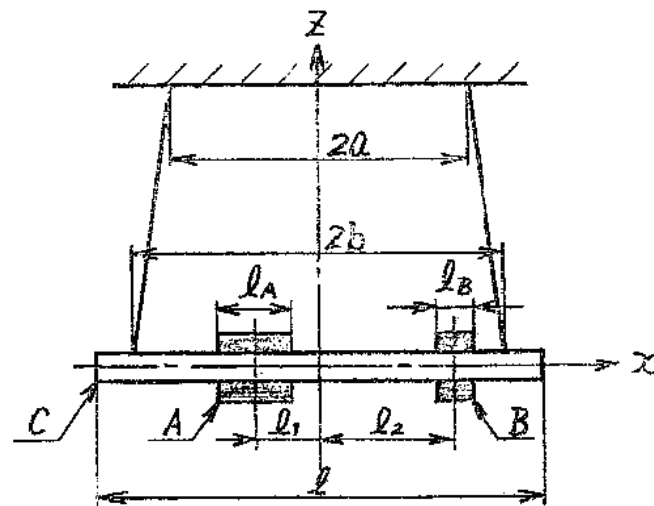


図 3 円筒物体と座標軸

(2) 試料 A, B を図 4 のように取り付け, これらを組合わせた試料の重心を通る鉛直軸 (Z 軸) 周りの慣性モーメント  $I_z$  を求めるために, 試料を小さく振動させてその周期  $T$  を測定する (この時, 試料 A, B を試料 C に取り付けた際の重心が回転中心である Z 軸と一致するよう, 試料 C の中心と長手方向の中心を一致させるように注意する).

周期  $T$  は次式のように

$$T = \frac{1}{n^2 p} \{(t_{n+1} + t_{n+2} + \dots + t_{2n})\} - (t_1 + t_2 + \dots + t_n)\}$$

から, 今回は  $2n = 10$  より  $n = 5$ , 各時刻計測間での往復回数  $p = 5$  として,

$$T = \frac{1}{125} \{(t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10}) - (t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5)\} \quad (8)$$

で与えられる.

試料 A, B の質量及び長さ  $m_A, m_B$  及び  $l_A, l_B$  とすると, 試料 A, B の組合わせ物体における釣り合いでは  $m_A l_1 = m_B l_2$  が成立する.

また, 試料 A, B は断面形状, 密度が等しいので,  $m_A$  と  $m_B$  の比は  $l_1$  と  $l_2$  の比で表すことができ, 試料 A, B の重心から Z 軸までの距離  $l_1, l_2$  の関係は

$$l_2 = l_1 \frac{l_A}{l_B}$$

となる。

本実験では、 $l_1, l_2$  の値を 2 種類に変えてそれぞれの場合での  $I_z$  を求めるので、 $T$  の測定はそれぞれのケースごとに行う。

また、 $2a$  及び  $2b$  を変えた場合についても測定する。

- (3) (1) で測定した質量と寸法から試料ごとの  $I_z$  を計算式から算出し、その一方で (2) で測定した周期からも  $I_z$  を算出し、2 つの値を比較検討する。

図 3 のような組み合わせ物体における慣性モーメントを求めるには、平行軸の定理を用いる。試料  $C$  の  $Z$  軸周りにおける組み合わせ物体の慣性モーメント  $I_z$  は次式のようになる。

$$I_z = I_{zC} + (I_{zA} + m_A l_1^2) + (I_{zB} + m_B l_2^2) \quad (9)$$

ここで、 $I_{zA}, I_{zB}, I_{zC}$  は、試料  $A, B, C$  のそれぞれの  $Z$  軸周りにおける慣性モーメントである。

## 5. 結果

実験装置の各測定値を表 1~2 に示す。

表 1 実験装置の各部の寸法及び量

	A (円筒大)	B (円筒小)	C (軸)
長さ [mm]	50.0	30.0	249.9
外径 2R [mm]	35.0	35.0	9.4
内径 2r [mm]	9.5	9.5	-
質量 [kg]	345.0	208.0	135.0

表 2 実験時の各部の寸法 (単位 [mm])

	パターン 1	パターン 2	パターン 3
$2a$	200.00	200.00	100.00
$2b$	240.00	240.00	240.00
$l_1$	50.00	54.26	54.26
$l_2$	82.90	90.00	90.00
$h$	414.50	414.50	409.05

また、表 3 に往復回数と時刻の測定値を示す。

表 3 往復回数と時間

往復時間	時間 [s]		
	パターン 1	パターン 2	パターン 3
0	0	0	0
5	4.06	4.21	5.96
10	8.06	8.44	11.62
15	12.37	12.72	17.50
20	16.02	16.96	23.25
25	19.96	21.06	29.10
30	23.90	25.34	34.78
35	27.90	29.60	40.53
40	31.81	33.75	46.32
45	35.75	37.92	52.01

次に、例としてパターン 1 の計算例を示す。

表 3 及び式 (8) を用いて周期  $T$  を求める。

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{125} \{(t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10}) - (t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5)\} \text{ より} \\
 &= \frac{1}{125} \{(19.96 + 23.90 + 27.90 + 31.81 + 35.75) - (0 + 4.06 + 8.06 + 12.37 + 16.02)\} \\
 \therefore T &= 0.790 \text{ s}
 \end{aligned}$$

また、式 (6) より  $I_{z1}$  を求める。

$$\begin{aligned}
 I_{z1} &= \frac{abmgT^2}{4\pi^2h} \text{ より} \\
 &= \frac{0.1 \times 0.12 \times (0.135 + 0.345 + 0.208) \times 9.8 \times 0.790^2}{4\pi^2 \times 0.4145} \\
 \therefore I_{z1} &= 3.086 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2
 \end{aligned}$$

他の場合も同様にして、計算結果を表 4 に示す。

表 4 計算結果

	パターン 1	パターン 2	パターン 3
周期 $T$ [s]	7.900	8.430	1.155
慣性モーメント $I_z$ [kg·m <sup>2</sup> ]	$3.086 \times 10^{-3}$	$3.511 \times 10^{-3}$	$3.344 \times 10^{-3}$

## 6. 考察

まず、式 (7) より各試料の慣性モーメントの理論値を求めると、

$$\begin{aligned} I_{zA} &= m \left( \frac{l^2}{12} + \frac{R^2 + r^2}{4} \right) \text{ より} \\ &= 0.345 \times \left( \frac{0.0509^2}{12} + \frac{0.0175^2 + 0.00475^2}{4} \right) \\ \therefore I_{zA} &= 1.028 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

同様に、 $I_{zB} = 3.270 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $I_{zC} = 7.033 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  となる。

次に、式 (9) より各パターンの  $I_z$  の理論値を求めると、

$$\begin{aligned} I_{z1} &= I_{zC} + (I_{zA} + m_A l_1^2) + (I_{zB} + m_B l_2^2) \text{ より} \\ &= 7.033 \times 10^{-4} + (1.028 \times 10^{-4} + 0.345 \times 0.050^2) + (3.270 \times 10^{-5} + 0.208 \times 0.0829^2) \\ \therefore I_{z1} &= 3.131 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

同様に、 $I_{z2} = I_{z3} = 3.539 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  となる。

よって、実験値と理論値を比べると、 $I_{z1}$  は  $(1 - 3.086/3.131) \times 100 = 1.4 \%$  の誤差があり、 $I_{z2}$  と  $I_{z3}$  はそれぞれ 0.8 %, 5.5 % の誤差があった。各パターンはそれぞれ誤差が小さく理論値に近い値となったが、この誤差の原因は式 (6) より周期  $T$  の値が原因と考えられる。つまり、各パターンの物体の回転振動が正確でなかったと考えられる。これは、物体を吊るした時に多少ながら傾いていて、誤差が大きいほど傾きの度合いが大きかったと推測できる。