

Lotka-Volterra 捕食系の改良

T. Nakagawa

1 目的

捕食者・被食者の2種生物の関係を表した, Lotka-Volterra 捕食系の非現実的な部分をより現実的にするために, その式を改良する.

2 Lotka-Volterra 方程式

$$\frac{dx}{dt} = rx - axy \quad (2.1a)$$

$$\frac{dy}{dt} = bxy - cy \quad (2.1b)$$

- $x(t)$ は被食者の個体数, $y(t)$ は捕食者の個体数.
- dx/dt は被食者の増加速度.
- dy/dt は捕食者の増加速度.
- $y = 0$ のとき, x は増殖率 r で指数増殖.
- $x = 0$ のとき, y は死亡率 c で減少.

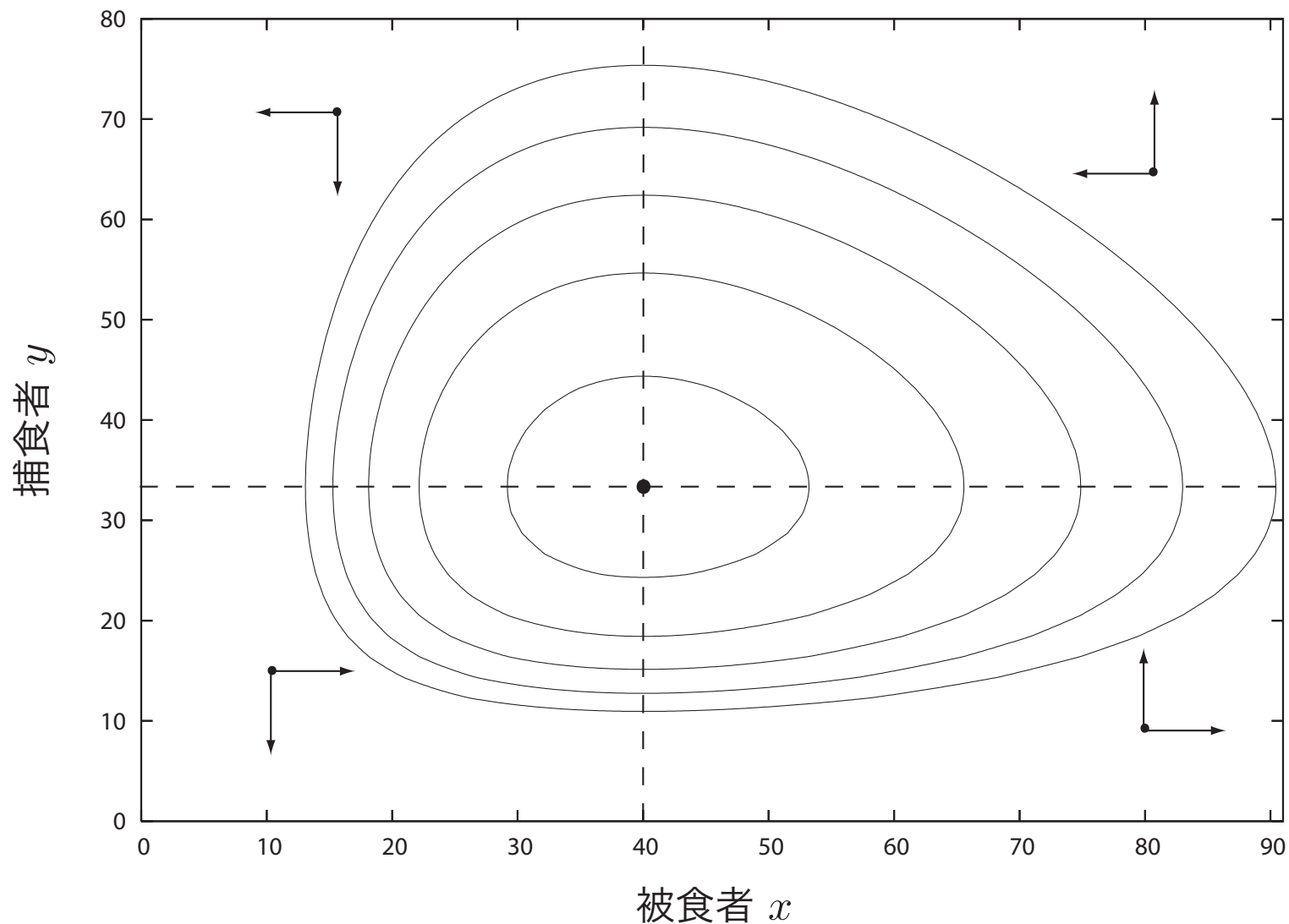


図 1 Lotka-Volterra 捕食系の解軌道

$$V(x, y) := -c \log x + bx - r \log y + ay = \text{const.}$$

3 問題点

$$\frac{dx}{dt} = rx - axy \quad (2.1a)$$

$$\frac{dy}{dt} = bxy - cy \quad (2.1b)$$

- $y = 0$ のとき, x は増殖率 r で指数増殖.
→ 現実では捕食されなくても無限に増殖不可能.
- x は捕食項 $-axy$ により, x と y に比例して減少.
→ 実際は x が多過ぎると, y は x を捕食しきれない.
- 微小な摂動が加わると周期は変化.
→ 現実では, 微小な摂動で周期は変化しない.

4 研究内容

リミットサイクルへ収束

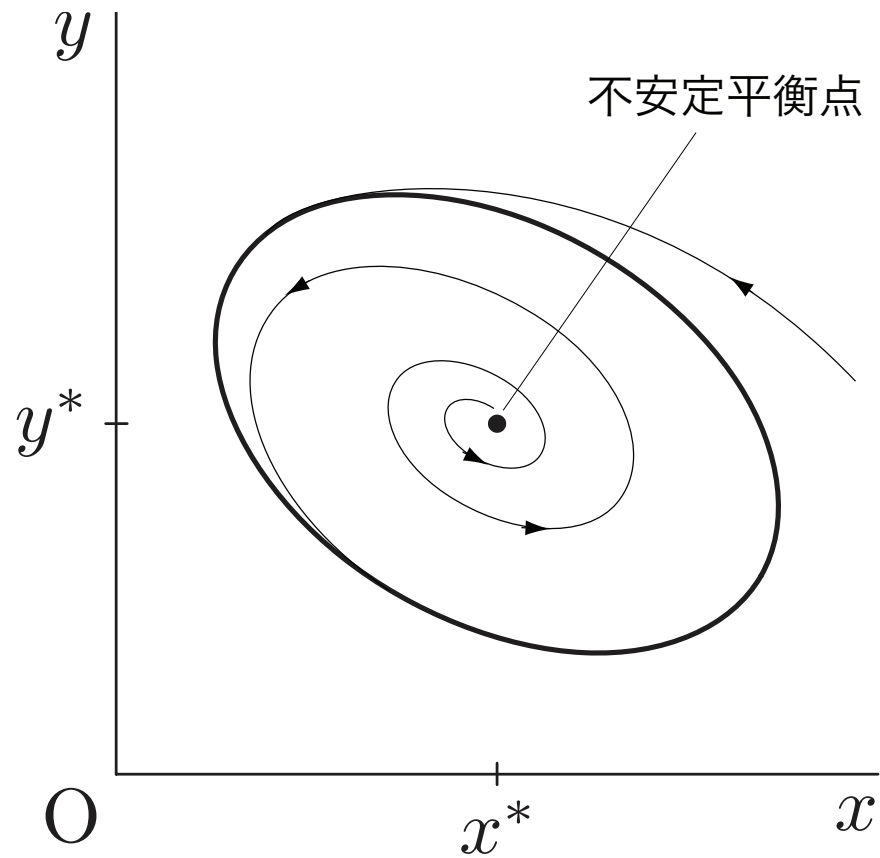


図 2 リミットサイクル

(2.1) をより現実的にするために修正

$$\frac{dx}{dt} = x \left\{ r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{ky}{x + D} \right\} \quad (3.1a)$$

$$\frac{dy}{dt} = y \left\{ s \left(1 - \frac{hy}{x} \right) \right\} \quad (3.1b)$$

- 1 個体当たりの増殖率は x と y の密度に依存.
- $y = 0$ のとき, x は環境容量 K に収束.
- x が多いとき, 捕食項は ky に飽和.
- y の環境容量は x/h で x の密度に正比例.
- 6 つのパラメータ r, K, k, D, s, h により解析し難い.

無次元化

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \frac{x(t)}{K}, \quad v(\tau) = \frac{hy(t)}{K}, \quad \tau = rt, \\ a &= \frac{k}{hr}, \quad b = \frac{s}{r}, \quad d = \frac{D}{K} \end{aligned} \tag{3.2}$$

- x を $y = 0$ のときの環境容量 K で割る.
- y の環境容量 x/h では x は変化.
→ K/h で割る.

無次元化: (3.2) を (2.1) に代入して整理

$$\frac{du}{d\tau} = u(1 - u) - \frac{auv}{u + d} =: f(u, v) \quad (3.3a)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = bv \left(1 - \frac{v}{u}\right) =: g(u, v) \quad (3.3b)$$

- 3つの無次元パラメータ a, b, d により解析し易い.

平衡点の安定性解析: (3.3) の線形化

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{d\tau} \\ \frac{dy}{d\tau} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^* \left\{ \frac{au^*}{(u^* + d)^2} - 1 \right\} & \frac{-au^*}{u^* + d} \\ b & -b \end{pmatrix}$$

- 平衡点 (u^*, v^*) は $du/d\tau = 0, dv/d\tau = 0$ の解.
- $u(\tau) = u^* + x(\tau), v(\tau) = v^* + y(\tau)$ とおき線形化.
- A は平衡点 (u^*, v^*) における Jacobi 行列.

平衡点の安定性解析: (3.4) が漸近安定である必要十分条件

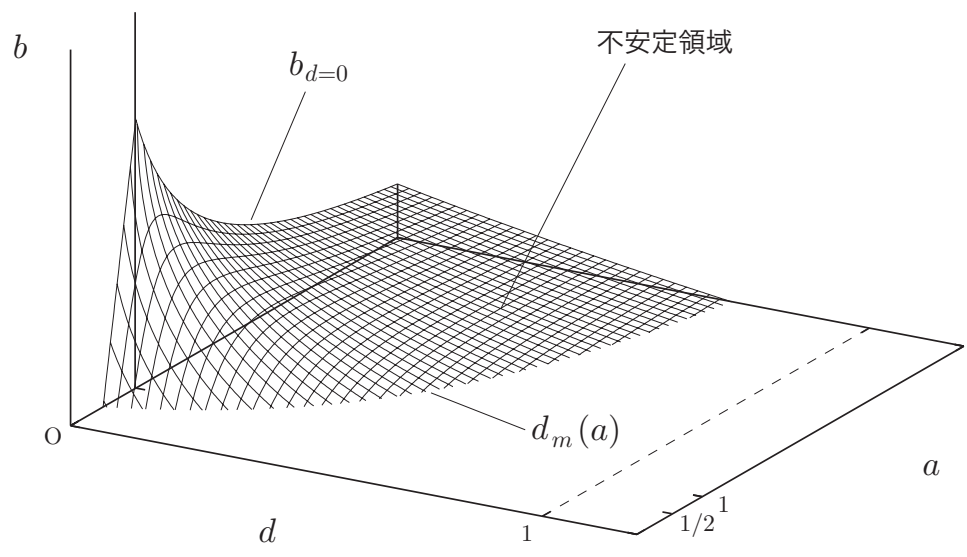
$$\operatorname{tr} A < 0 \quad \Rightarrow \quad u^* \left\{ \frac{au^*}{(u^* + d)^2} - 1 \right\} < b,$$

$$\det A > 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ 1 + \frac{ad}{(u^* + d)^2} \right\} bu^* > 0$$

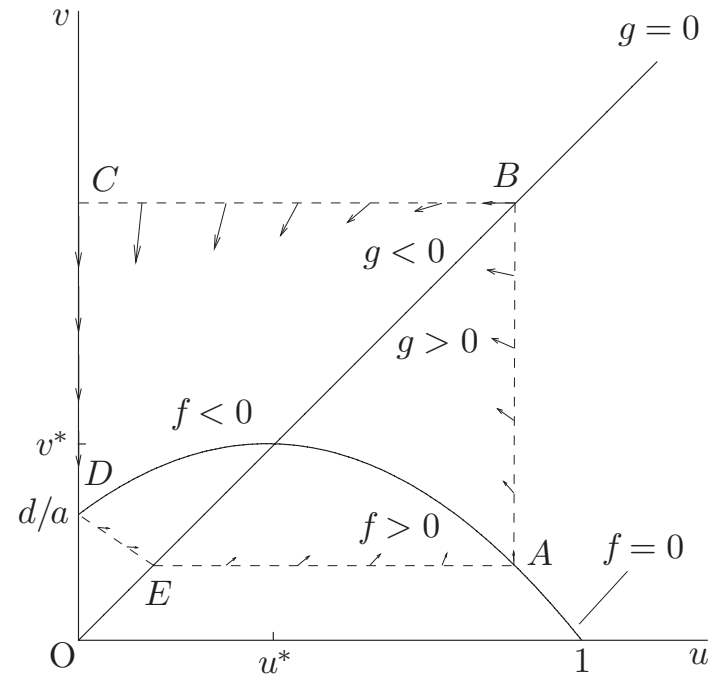
- 常に $\det A > 0$ より, $\operatorname{tr} A < 0$ にのみ安定領域が決定.

$$b > \left[a - \{(1 - a - d)^2 + 4d\}^{1/2} \right] \\ \times \frac{\left[1 + a + d - \{(1 - a - d)^2 + 4d\}^{1/2} \right]}{2a}$$

- (a, b, d) 空間内に境界曲面が定義される.

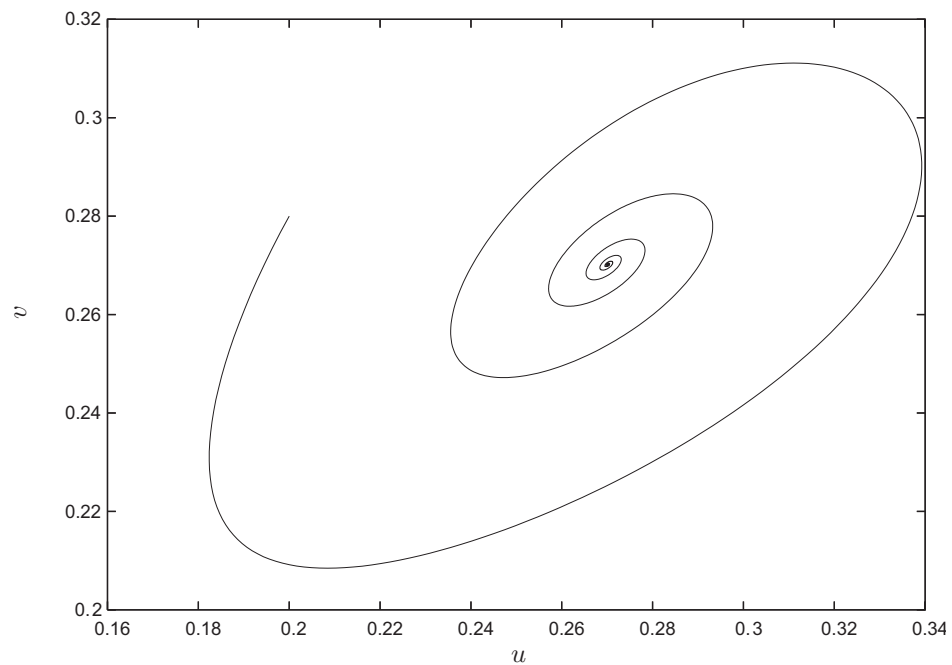


(a) 定常状態の不安定なパラメータ領域

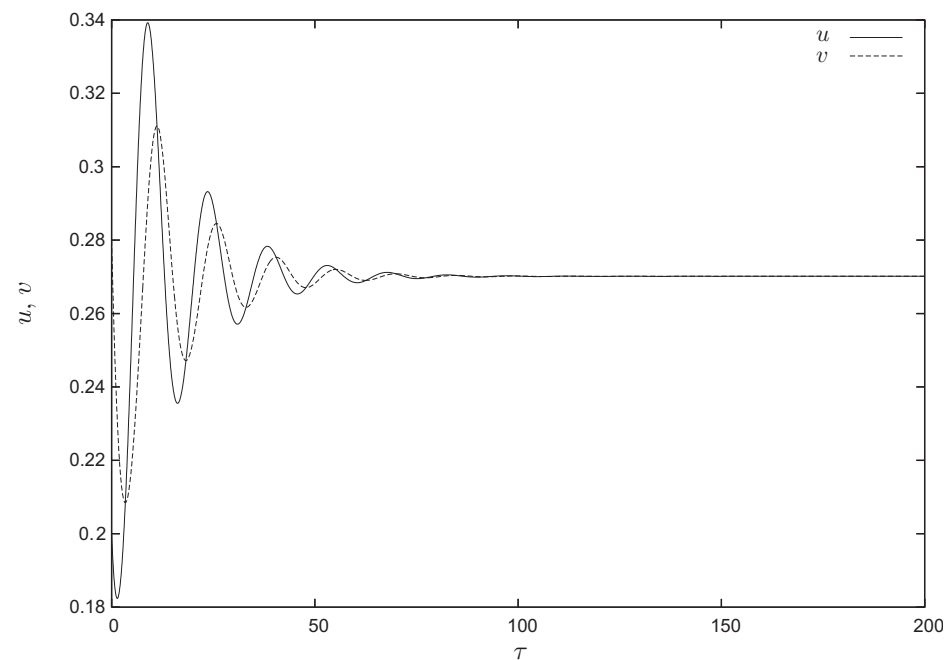


(b) アイソクライン及びベクトル場

図 3

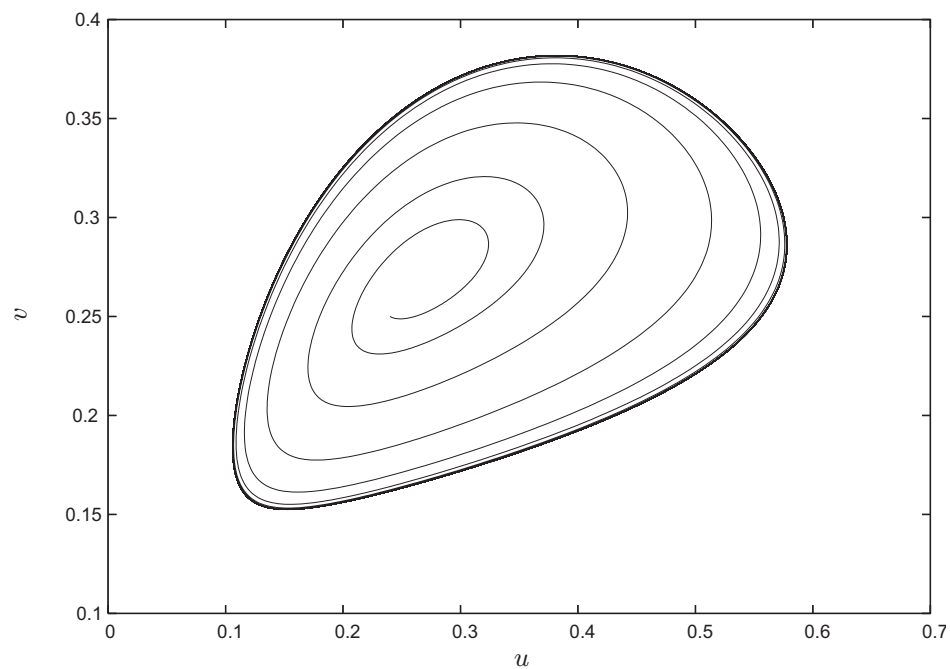


(a) 安定平衡点へ収束

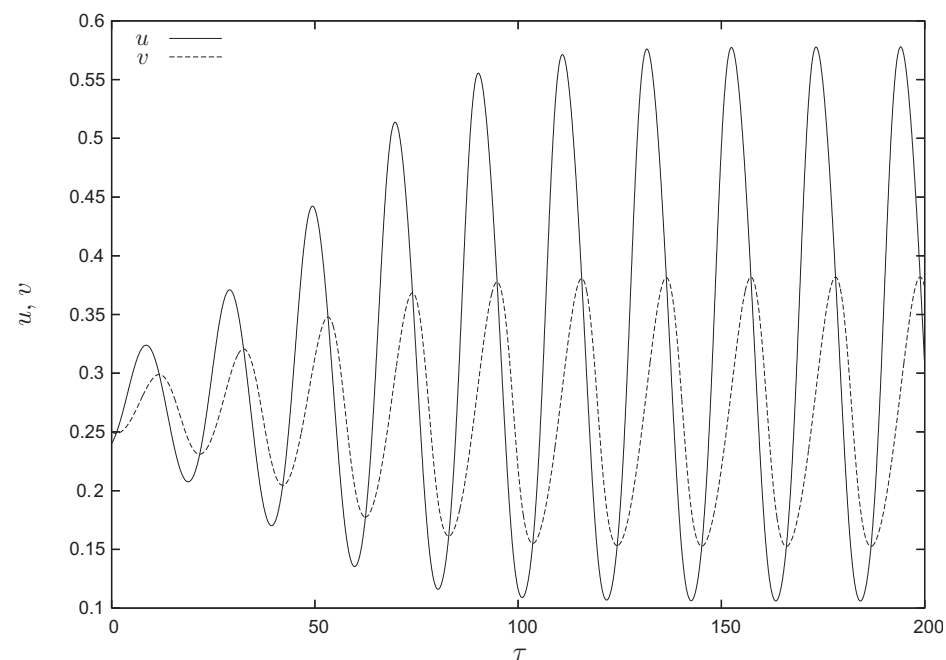


(b) u と v の減衰振動

図 4 $a = 1, b = 0.4, d = 0.1, u(0) = 0.20, v(0) = 0.28$

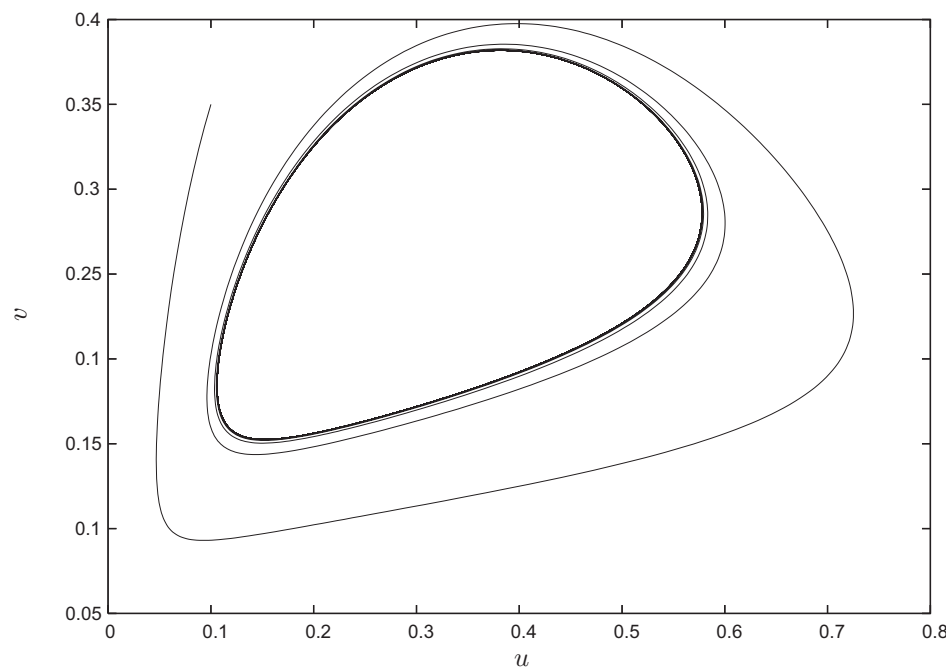


(a) リミットサイクル

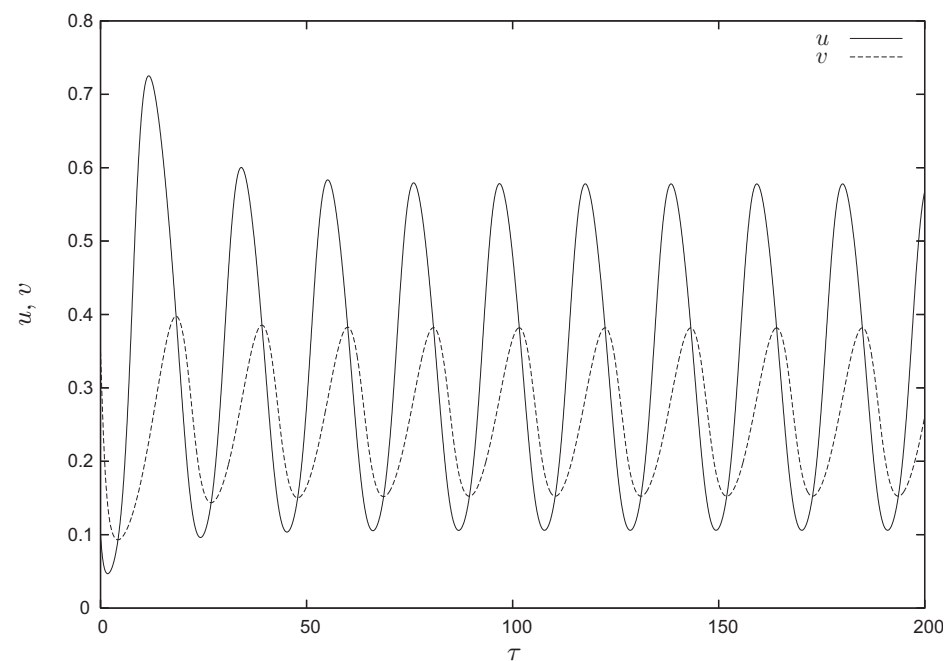


(b) u と v の振動

図 5 $a = 1, b = 0.2, d = 0.1, u(0) = 0.24, v(0) = 0.25$



(a) リミットサイクル



(b) u と v の振動

図 6 $u(0) = 0.10, v(0) = 0.35$