$SU(2)$ と $SO(3)$ の有限次元既約表現の分類

T. Nakagawa

January 21, 2009

2 次特殊ユニタリ群 $SU(2)$ と 3 次特殊直交群 $SO(3)$ はコンパクト Lie 群であるから, 表現の完全可約性により任意の有限次元表現は既約表現の直和に分解される．そこで, 具体的に $SU(2)$ と $SO(3)$ の有限次元既約表現の構成と分類を行う．また $SO(3)$ の既約表現は $SU(2)$ からの 2 重被覆写像を通じて $SU(2)$ の既約表現に還元されることを見るであろう．ここでは微分表現を利用して, Lie 環の表現から導く方法により議論する．

1　$SU(2)$ の有限次元既約表現の構成

V_n を 2 変数複素係数 n 次同次多項式の集合とする．すなわち,

$$V_n := \{a_0 z_1^n + a_1 z_1^{n-1} z_2 + \cdots + a_n z_2^n \ ;\ a_0,\ \ldots,\ a_n \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}[z_1, z_2].$$

V_n は明らかに複素ベクトル空間で, V_n の基底は $\{z_1^n,\ z_1^{n-1}z_2,\ \ldots,\ z_2^n\}$ で与えられるから, $\dim V_n = n+1$ である．

$SU(2)$ は行列の掛け算として自然に $\mathbb{C}^2$ に作用する: $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SU(2),\ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ とすれば,

$$SU(2) \times \mathbb{C}^2 \ni (g, z) \mapsto gz = (az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2) \in \mathbb{C}^2$$

となるから, g は $\mathbb{C}^2$ の 1 次変換である．

よって, $SU(2)$ の V_n への作用 π_n が

$$SU(2) \times V_n \ni (g, f) \mapsto (\pi_n(g)f)(z) := f(g^{-1}z) \in V_n$$

によって定義できる．実際, $g \in SU(2)$, $f \in V_n$ に対して,

$$(\pi_n(g)f)(z_1, z_2) = f(dz_1 - bz_2, -cz_1 + az_2) \in V_n$$

となるから, π_n は V_n の 1 次変換である．そして, ${z_1}' = dz_1 - bz_2$, ${z_2}' = -cz_1 + az_2$, $g' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ とすれば,

$$\begin{aligned}
(\pi_n(g)\pi_n(g')f)(z_1, z_2) &= (\pi_n(g)f)({z_1}', {z_2}') \\
&= f(d'{z_1}' - b'{z_2}', -c'{z_1}' + a'{z_2}') \\
&= f((d'd + b'c)z_1 - (d'b + b'a)z_2, -(c'd + a'c)z_1 + (c'b + a'a)z_2) \\
&= (\pi_n(gg')f)(z_1, z_2)
\end{aligned}$$

が成り立つから, $\pi_n(gg') = \pi_n(g)\pi_n(g')$ である．これより $\pi_n(g)\pi_n(g^{-1}) = \pi_n(gg^{-1}) = \pi_n(I) = \mathrm{id}_{V_n}$ となるので, $\pi_n(g)$ は正則 1 次変換である．よって, 群準同型 $\pi_n : SU(2) \to GL(V_n)$ は $SU(2)$ の V_n におけ

る表現である．さらに V_n の基底 ${z_1}^{n-k}{z_2}^k$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ に関する $\pi_n(g)$ の行列成分は g の成分 $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{C}$ の多項式であるから, 準同型 π_n は連続である．ゆえに π_n は可微分となる[*1]. 以上で $SU(2)$ の有限次元表現が構成された．(π_n, V_n) が既約であることは第 4 節で示される．

注意 1.1 一般に, 群 G が集合 X に作用しているとき, X 上の函数より成る函数空間への G の作用を $(L(g)f)(x) := f(g^{-1}x)$ $(g \in G,\ x \in X)$ と定めれば, L は群 G の表現を定義する．この表現 L を**左正則表現** (left regular representation) という．

2 ウェイト分解

以下, V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．

$SU(2)$ の部分群

$$T := \left\{ t_a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \ ;\ a \in \mathbb{C},\ |a| = 1 \right\}$$

を考えれば, $T \simeq U(1)$ である．$U(1)$ の幾つかの直積と同型な群を**トーラス** (torus) という．$SU(2)$ における T の中心化群は T 自身に一致することが容易に確かめられるから, T は $SU(2)$ の極大可換部分群である．特に, $SU(2)$ の部分群 T' が $T \subset T'$ で, ある $n \geq 1$ に対して $T' \simeq \mathbb{T}^n$ を満たすならば, T' は T に一致する．これにより, T は $SU(2)$ の**極大トーラス** (maximal torus) と呼ばれる．

注意 2.1 コンパクト Lie 群 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする．G の極大トーラス T と $\mathfrak{g}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{t}$ とは, $T = \exp \mathfrak{t}$, $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ により 1 対 1 に対応する．

$SU(2)$ の任意の表現 (ρ, V) を T に制限したものは T の 1 次元表現の直和に分解できる: $V = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{C}v_j$. よって, V の基底を各直和成分から取れば, 各 v_j は $\{\rho(t_a)\ ;\ t_a \in T\}$ の同時固有ベクトルであるから, $\rho(t_a) : V \to V$ は任意の $t_a \in T$ について同時対角化可能である．従って, V は $\{\rho(t_a)\ ;\ t_a \in T\}$ に関して同時固有空間分解できることがわかる．すなわち

$$V = \bigoplus_{m \in W_\rho} V(m)$$

である．ここで, $V(m) := \{v \in V\ ;\ \rho(t_a)v = a^m v,\ \forall t_a \in T\}$ とし[*2], $W_\rho := \{m \in \mathbb{Z}\ ;\ V(m) \neq \{0\}\}$ は $\dim V < \infty$ より有限集合である．この分解を T に関する (ρ, V) の**ウェイト分解** (weight decomposition) と呼び, W_ρ の元を ρ の**ウェイト** (weight), W_ρ の最大元を ρ の**最高ウェイト** (highest weight), $V(m)$ をウェイト m に対する**ウェイト空間** (weight space) と呼ぶ．$\dim V(m)$ はウェイト m の**重複度** (multiplicity) と呼ばれる．

第 1 節の (π_n, V_n) をウェイト分解しよう．$f(z_1, z_2) = {z_1}^{n-k}{z_2}^k$ のとき

$$\begin{aligned} (\pi_n(t_a)f)\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} &= f\left(t_a^{-1}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = f\begin{bmatrix} a^{-1}z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= (a^{-1}z_1)^{n-k}(az_2)^k = a^{2k-n}{z_1}^{n-k}{z_2}^k \\ &= a^{2k-n} f\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[*1] Lie 群の連続準同型は可微分となることが知られている．従って, それは Lie 群の準同型である．

[*2] $U(1)$ の既約表現を思い出そう．拙著『$U(1)$ の有限次元複素表現』を参照されたい．

より, $V(2k-n)=\{f\in V_n\ ;\ \pi_n(t_a)f=a^{2k-n}f,\ \forall t_a\in T\}=\mathbb{C}{z_1}^{n-k}{z_2}^k$ となる. 従って,

$$V_n=\mathbb{C}{z_1}^n\oplus\mathbb{C}{z_1}^{n-1}z_2\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}{z_2}^n$$

は T に関するウェイト分解であって, $W_{\pi_n}=\{-n,\ -n+2,\ -n+4,\ \ldots,\ n\}$, π_n の最高ウェイトは n, 各ウェイトの重複度は 1 である.

そこで (π,V_n) は "最高ウェイト n の既約表現" と呼ばれる.

3 微分表現と Lie 環の表現の複素化

連続写像 $g:\mathbb{R}\ni t\mapsto g(t)\in GL(n,\mathbb{C})$ で, 任意の $s,\ t\in\mathbb{R}$ に対して, $g(s+t)=g(s)g(t)$ を満たすものを $GL(n,\mathbb{C})$ の **1 パラメータ部分群** (one-parameter subgroup) という. $GL(n,\mathbb{C})$ の 1 パラメータ部分群について次の定理が知られている[*3].

注意 3.1 1 パラメータ部分群の定義から直ちに, $g(0)=I$, $g(t)^{-1}=g(-t)$ が導かれる. さらに $g(s)g(t)=g(s+t)=g(t)g(s)$ である. よって $GL(n,\mathbb{C})$ の 1 パラメータ部分群は $GL(n,\mathbb{C})$ の可換な部分群である.

定理 3.1 $\{g(t)\ ;\ t\in\mathbb{R}\}$ が $GL(n,\mathbb{C})$ の 1 パラメータ部分群ならば, $g(t)$ は t について微分可能であって, $g'(0)=X\ (X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\simeq M(n,\mathbb{C}))$ とおけば,

$$g(t)=\exp tX\qquad(\forall t\in\mathbb{R})$$

と表すことができる. X は g によって一意的に定まる.

下の定理 3.2 の証明するために, 次の命題が必要になるが, 証明は省く.

命題 3.1 任意の $X,\ Y\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\exp\frac{X}{n}\exp\frac{Y}{n}\right)^n=\exp(X+Y)$$

が成り立つ.

線型 Lie 群 G の表現 (ρ,V) から, 次のようにして G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現が導かれる[*4].

定理 3.2 ρ を線型 Lie 群 G から $GL(V)$ への準同型とすれば, 単位元 $e\in G$ における ρ の微分

$$d\rho_e:T_e(G)\ni X\mapsto d\rho_e(X)=\frac{d}{dt}\rho(\exp tX)\Big|_{t=0}\in T_{\rho(e)}(GL(V))$$

は G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ から $GL(V)$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}(V)$ への準同型を引き起こし,

$$\rho(\exp tX)=\exp(td\rho_e(X))\qquad(\forall t\in\mathbb{R})$$

を満たす.

証明 先ず, $X\in\mathfrak{gl}(V)$ に対して, $\rho(\exp(t+s)X)=\rho(\exp tX\exp sX)=\rho(\exp tX)\rho(\exp sX)$ より写像 $\mathbb{R}\ni t\mapsto\rho(\exp tX)\in GL(V)$ は $GL(V)$ の 1 パラメータ部分群となるので, 定理 3.1 より, $\rho(\exp tX)=\exp(td\rho_e(X))$ が成り立つ.

[*3] $n=1$ の場合は, 拙著『$U(1)$ の有限次元複素表現』で示した. とは言え, そこでは始めから写像 f の微分可能性を仮定していたが.

[*4] $GL(n,\mathbb{C})$ の閉部分群 G を線型 Lie 群と呼び, G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}:=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\ ;\ \exp tX\in G,\ \forall t\in\mathbb{R}\}$ と定義される.

次に, $d\rho_e$ が $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への Lie 環の準同型であることを示す.

線型性: 任意の $a \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}$ に対して, $d\rho_e(aX) = ad\rho_e(X)$ は明らかである[*5]. 補題 3.1 と ρ の連続性より, 任意の $t \in \mathbb{R}$, $X,\ Y \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\exp(td\rho_e(X+Y)) &= \rho(\exp t(X+Y)) \\
&= \rho\left(\lim_{n\to\infty}\left(\exp\frac{t}{n}X\exp\frac{t}{n}Y\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\rho\left(\left(\exp\frac{t}{n}X\exp\frac{t}{n}Y\right)^n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\rho\left(\exp\frac{t}{n}X\right)\rho\left(\exp\frac{t}{n}Y\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\exp\frac{t}{n}d\rho_e(X)\exp\frac{t}{n}d\rho_e(Y)\right)^n \\
&= \exp t\left(d\rho_e(X)+d\rho_e(Y)\right).
\end{aligned}$$

よって, この式の両辺の $t=0$ における微分係数を求めて, $d\rho_e(X+Y) = d\rho_e(X) + d\rho_e(Y)$ を得る.

括弧積を保つこと: $Z(t) := \rho(\exp tX)d\rho_e(Y)\rho(\exp tX)^{-1}$ とおく. $Z(t)\rho(\exp tX) = \rho(\exp tX)d\rho_e(Y)$ であるから, この式の両辺の $t=0$ における微分係数は

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= Z'(0)\rho(e) + Z(0)\frac{d}{dt}\rho(\exp tX)\Big|_{t=0} = Z'(0) + d\rho_e(Y)d\rho_e(X), \\
(\text{右辺}) &= \frac{d}{dt}\rho(\exp tX)\Big|_{t=0}d\rho_e(Y) = d\rho_e(X)d\rho_e(Y).
\end{aligned}$$

ゆえに, $Z'(0) = d\rho_e(X)d\rho_e(Y) - d\rho_e(Y)d\rho_e(X)$ となる. また, $g_1(t) := \exp tX$, $g_2(s) := \exp sY$ とおいて,

$$\begin{aligned}
Z'(0) &= \frac{d}{dt}Z(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\rho(g_1(t))d\rho_e(Y)\rho(g_1(t))^{-1}\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\rho(g_1(t))\frac{d}{ds}\rho(g_2(s))\Big|_{s=0}\rho(g_1(t))^{-1}\right)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\left(\rho(g_1(t))\rho(g_2(s))\rho(g_1(t))^{-1}\right)\Big|_{s=0}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\rho\left(g_1(t)g_2(s)g_1(t)^{-1}\right)\Big|_{s=0}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\rho\left(\exp\left(sg_1(t)Yg_1(t)^{-1}\right)\right)\Big|_{s=0}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}d\rho_e\left(g_1(t)Yg_1(t)^{-1}\right)\Big|_{t=0} \\
&= d\rho_e\left(\frac{d}{dt}g_1(t)Yg_1(t)^{-1}\Big|_{t=0}\right) = d\rho_e\left(\frac{d}{dt}(\exp tX)Y(\exp tX)^{-1}\Big|_{t=0}\right) \\
&= d\rho_e\left([X,Y]\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ[*6]. 従って, 任意の $X,\ Y \in \mathfrak{g}$ に対して, $d\rho_e([X,Y]) = [d\rho_e(X), d\rho_e(Y)]$ を得る. □

定理 3.2 より, G の $GL(V)$ における表現 ρ が与えられたとき, その微分 $d\rho_e$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{gl}(V)$ における表現を引き起こすことが分かる. これを単に $d\rho$ と書いて, ρ の**微分表現** (differential representation) という. また, $\rho(g)$ と書けば群 G の表現, $\rho(X)$ と書けば Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現を意味する.

命題 3.2 (ρ, V) を線型 Lie 群 G の表現とし, $(d\rho, V)$ をその微分表現とする. このとき次のことが成り立つ.

(1) V の G-部分加群 W は $\mathfrak{g}$-部分加群である.

(2) G が連結ならば逆に $\mathfrak{g}$-部分加群 W は G-部分加群である.

(3) G が連結ならば, (ρ, V) が既約であることは $(d\rho, V)$ が既約であるための必要十分条件である.

[*5] 線型 Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は実ベクトル空間である.

[*6] 下から 2 行目の 2 つ目の等号は微分が線型写像と可換であるという事実を使った.

証明　(1) W は G-部分加群であるから, $X \in \mathfrak{g}$, $w \in W$ に対して,

$$\frac{1}{t}(\rho(\exp tX)w - w) \in W \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

よって, $t \to 0$ とすれば

$$\rho(X)w = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\rho(\exp tX)w - w) \in W.$$

が成り立つ[*7]. ゆえに, W は $\mathfrak{g}$-部分加群である.

(2) $X \in \mathfrak{g}$, $w \in W$ に対して, $\rho(X)w \in W$ ならば

$$\left(1 + \frac{t}{1!}\rho(X) + \frac{t^2}{2!}\rho(X)^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}\rho(X)^n\right) w \in W \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

である. そこで $n \to \infty$ とすれば, $\rho(\exp tX)w = \exp t\rho(X)w \in W$ となる. いま G は連結であるから, 任意の $g \in G$ は $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m \in \mathfrak{g}$ を用いて, $g = (\exp X_1)(\exp X_2)\cdots(\exp X_m)$ と書くことができる[*8]. よって

$$\rho(g)W = \rho((\exp X_1)(\exp X_2)\cdots(\exp X_m))W = \rho(\exp X_1)\rho(\exp X_2)\cdots\rho(\exp X_m)W \subset W$$

が成り立つ. ゆえに, W は G-部分加群である.

(3) ρ は既約でないとする. すなわち, ある G-部分加群 W ($\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$) が存在する. (1), (2) より W は $\mathfrak{g}$-部分加群である. よって, $d\rho$ は既約でない. 逆も同様である. □

命題 3.3 連結線型 Lie 群 G の表現 (ρ, V) と (ρ', V') が同値であることは G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現 $(d\rho, V)$ と $(d\rho', V')$ が同値であるための必要十分条件である.

証明　先ず (ρ, V) と (ρ', V') が同値であるとする. すなわち, ある線型同型 $A : V \to V'$ が存在して, 任意の $g \in G$, $v \in V$ に対して, $A(\rho(g)v) = \rho'(g)A(v)$ を満たす. このとき任意の $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ に対して,

$$A\left(\frac{\rho(\exp tX)v - v}{t}\right) = \left(\frac{\rho'(\exp(tX) - 1}{t}\right) A(v) \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

よって $t \to 0$ とすれば, $A(\rho(X)v) = \rho'(X)A(v)$ を得る. ゆえに, $(d\rho, V)$ と $(d\rho', V')$ は同値である.

逆に $(d\rho, V)$ と $(d\rho', V')$ が同値であるとする. すなわち, ある線型同型 $A : V \to V'$ が存在して, 任意の $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ に対して, $A(\rho(X)v) = \rho'(X)A(v)$ を満たす. このとき n に関する帰納法で $A(\rho(X)^n v) = \rho'(X)^n A(v)$ が成り立つので[*9],

$$A\left(v + \frac{t}{1!}\rho(X)v + \cdots + \frac{t^n}{n!}\rho(X)^n v\right) = \left(1 + \frac{t}{1!}\rho'(X) + \cdots + \frac{t^n}{n!}\rho'(X)^n\right) A(v) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. よって $n \to \infty$ とすれば, $A(\rho(\exp tX)v) = \rho'(\exp tX)A(v)$ となる. いま G は連結であるから, 任意の $g \in G$ は $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m \in \mathfrak{g}$ を用いて, $g = (\exp X_1)(\exp X_2)\cdots(\exp X_m)$ と書くことができる. ゆえに任意の $g \in G$ に対して,

$$\begin{aligned}
A(\rho(g)v) &= A(\rho((\exp X_1)(\exp X_2)\cdots(\exp X_m))v) = A(\rho(\exp X_1)\rho(\exp X_2)\cdots\rho(\exp X_m)v) \\
&= \rho'(\exp X_1)A(\rho(\exp X_2)\cdots\rho_1(\exp X_m)v) = \rho'(\exp X_1)\rho'(\exp X_2)\cdots\rho'(\exp X_m)A(v) \\
&= \rho'((\exp X_1)(\exp X_2)\cdots(\exp X_m))A(v) \\
&= \rho'(g)A(v)
\end{aligned}$$

[*7] 有限次元ベクトル空間の部分空間は全て閉集合である.

[*8] $\mathfrak{g}$ の元 X_j およびその数は g により異なる.

[*9] $n = 2$ のとき, $A(\rho(X)^2 v) = A(\rho(X)(\rho(X)v)) = \rho'(X)A(\rho(X)v) = \rho'(X)(\rho'(X)A(v)) = \rho'(X)^2 A(v)$ である.

が成り立つ. 従って, (ρ, V) と (ρ', V') は同値である. $\square$

実 Lie 環 ($\mathbb{R}$ 上の Lie 環) の表現に対して, その複素化 ($\mathbb{C}$ への係数拡大) の表現を構成しよう. 実 Lie 環の複素化は複素 Lie 環になるが, 複素 Lie 環は複素ベクトル空間であるから, 表現が複素線型写像であるということが意味を持つ.

命題 3.4 $\mathfrak{g}$ を実 Lie 環とし, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ の複素化とする. $\mathfrak{g}$ の任意の表現 (ρ, V) に対して, 実 Lie 環の準同型写像 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ からの複素線型写像に拡張したものを $\rho_{\mathbb{C}}$ で表す:

$$\rho_{\mathbb{C}}(X + iY) := \rho(X) + i\rho(Y) \qquad (X,\ Y \in \mathfrak{g}).$$

このとき, $\rho_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の V における表現を与える.

証明 任意の $a,\ b \in \mathbb{R},\ X,\ Y \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$\begin{aligned}\rho_{\mathbb{C}}((a+ib)(X+iY)) &= \rho_{\mathbb{C}}(aX - bY + i(aY + bX)) = \rho(aX - bY) + i\rho(aY + bX)\\ &= a\rho(X) - b\rho(Y) + ia\rho(Y) + ib\rho(X) = (a+ib)\rho(X) + i(a+ib)\rho(Y)\\ &= (a+ib)\rho_{\mathbb{C}}(X+iY).\end{aligned}$$

よって, $\rho_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への複素線型写像である.

また, 任意の $X,\ Y,\ Z,\ W \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$\begin{aligned}\rho_{\mathbb{C}}([X+iY, Z+iW]) &= \rho_{\mathbb{C}}((X+iY)(Z+iW) - (Z+iW)(X+iY))\\ &= \rho_{\mathbb{C}}([X,Z] - [Y,W] + i([X,W] + [Y,Z]))\\ &= \rho([X,Z] - [Y,W]) + i\rho([X,W] + [Y,Z])\\ &= [\rho(X), \rho(Z)] - [\rho(Y), \rho(W)] + i[(\rho(X), \rho(W)] + i[\rho(Y), \rho(Z)]\\ &= [\rho_{\mathbb{C}}(X+iY), \rho_{\mathbb{C}}(Z+iW)].\end{aligned}$$

ゆえに, $\rho_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の V における表現である. $\square$

この表現 $\rho_{\mathbb{C}}$ を表現 ρ の**複素化** (complexification) と呼ぶ.

命題 3.5 (ρ, V) を実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現とし, $(\rho_{\mathbb{C}}, V)$ を $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の表現とする. このとき次が成り立つ.

(1) V の $\mathfrak{g}$-部分加群 W は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-部分加群である.

(2) (ρ, V) が既約であることは $(\rho_{\mathbb{C}}, V)$ が既約であるための必要十分条件である.

証明 (1) 仮定より W は $\mathfrak{g}$-部分加群であるから, 任意の $X,\ Y \in \mathfrak{g},\ w \in W$ に対して,

$$\rho_{\mathbb{C}}(X+iY)w = \rho(X)w + i\rho(Y)w \in W.$$

よって W は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-部分加群である.

(2) 先ず ρ が既約であるとする. W が V の $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-部分加群ならば, 明らかに W は $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ で不変である. よって $W = \{0\}$ か $W = V$ である. ゆえに $\rho_{\mathbb{C}}$ は既約である.

逆に $\rho_{\mathbb{C}}$ が既約であるとする. W が V の $\mathfrak{g}$-部分加群ならば, (1) より W は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-部分加群である. よって $W = \{0\}$ か $W = V$ である. ゆえに ρ は既約である. $\square$

命題 3.6 実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現 (ρ, V) と (ρ', V') が同値であることは複素 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の表現 $(\rho_{\mathbb{C}}, V)$ と $(\rho'_{\mathbb{C}}, V')$ が同値であるための必要十分条件である.

証明　先ず (ρ, V) と (ρ', V') が同値であるとする．すなわち, ある線型同型 $A : V \to V'$ が存在して, 任意の $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ に対して, $A(\rho(X)v) = \rho'(X)A(v)$ を満たす．任意の $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は $Z = X + iY$ $(X,\ Y \in \mathfrak{g})$ と表されるので,

$$\begin{aligned}
A(\rho_{\mathbb{C}}(Z)v) &= A(\rho_{\mathbb{C}}(X+iY)v) = A(\rho(X)v + i\rho(Y)v) \\
&= A(\rho(X)v) + iA(\rho(Y)v) = \rho'(X)A(v) + i\rho'(Y)A(v) \\
&= (\rho'(X) + i\rho'(Y))A(v) = {\rho'}_{\mathbb{C}}(X+iY)A(v) \\
&= {\rho'}_{\mathbb{C}}(Z)A(v).
\end{aligned}$$

ゆえに, $(\rho_{\mathbb{C}}, V)$ と $({\rho'}_{\mathbb{C}}, V')$ は同値である．

逆に $(\rho_{\mathbb{C}}, V)$ と $({\rho'}_{\mathbb{C}}, V')$ が同値であるとする．すなわち, ある線型同型 $A : V \to V'$ が存在して, 任意の $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $v \in V$ に対して,

$$A(\rho_{\mathbb{C}}(X)v) = {\rho'}_{\mathbb{C}}(X)A(v) \tag{3.1}$$

を満たす．このとき, 上式は $\mathfrak{g}$ の任意の元に対して成り立つので, (ρ, V) と (ρ', V') は同値である．□

第 1 節で構成した表現 $\pi_n : SU(2) \to GL(V_n)$ の微分表現 $d\pi_n : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{gl}(V_n)$ を求めよう．ここで, $\mathfrak{su}(2) = \{X \in M(2,\mathbb{C})\ ;\ X^* = -X,\ \mathrm{tr}X = 0\}$ である．

$$\pi_n(X) = \frac{d}{dt}\pi_n(\exp tX)\Big|_{t=0} \qquad (X \in \mathfrak{su}(2))$$

より, 任意の $f \in V_n$ に対して

$$(\pi_n(X)f)(z) = \frac{d}{dt}(\pi_n(\exp tX)f)(z)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f(\exp(-tX)z)\Big|_{t=0}.$$

$z(t) := \exp(-tX)z \in \mathbb{C}^2$ とおけば, $z(0) = z$ である．もちろん $z(t) = (z_1(t), z_2(t))$ $(z_j(t) \in \mathbb{C})$ である．連鎖律により

$$\pi_n(X)f = \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dt}\Big|_{t=0} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dt}\Big|_{t=0}.$$

$dz/dt|_{t=0} = -Xz$ なので, よって $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(2)$ とおけば,

$$\pi_n(X)f = -\frac{\partial f}{\partial z_1}(\alpha z_1 + \beta z_2) - \frac{\partial f}{\partial z_2}(\gamma z_1 + \delta z_2),$$

すなわち

$$\pi_n(X) = -\frac{\partial}{\partial z_1}(\alpha z_1 + \beta z_2) - \frac{\partial}{\partial z_2}(\gamma z_1 + \delta z_2). \tag{3.2}$$

命題 3.4 によれば, $\mathfrak{su}(2)$ の表現は $\mathfrak{su}(2)$ の複素化の表現に拡張されるが, $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ であるから, 式 (3.2) によって与えられた $\mathfrak{su}(2)$ の表現 $d\pi_n$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現 $(d\pi_n)_{\mathbb{C}}$ に拡張される．さらに, $(d\pi_n)_{\mathbb{C}}$ は式 (3.2) によって与えられることが容易に確かめられる．今後, $(d\pi_n)_{\mathbb{C}}$ を単に $d\pi_n$ で表すことにする．

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \{X \in M(2,\mathbb{C})\ ;\ \mathrm{tr}X = 0\}$ の次のような基底を考えよう:

$$H := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ X_+ := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ X_- := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

先ず, $\pi_n(H)$ は式 (3.2) より

$$\pi_n(H) = -\frac{\partial}{\partial z_1} z_1 + \frac{\partial}{\partial z_2} z_2$$

となる. V_n の基底 ${z_1}^{n-k}{z_2}^k$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ に $\pi_n(H)$ を作用させれば,

$$\pi_n(H){z_1}^{n-k}{z_2}^k = -(n-k){z_1}^{n-k}{z_2}^k + k{z_1}^{n-k}{z_2}^k = (2k-n){z_1}^{n-k}{z_2}^k \tag{3.3}$$

である. よって, ${z_1}^{n-k}{z_2}^k$ は $\pi_n(H)$ の固有値 $2k-n$ の固有ベクトルである.

注意 3.2 $\pi_n(H)$ の固有値 $-n,\ -n+2,\ -n+4,\ \ldots,\ n$ は表現 $d\pi_n$ の**ウェイト**と呼ばれ, その最大値は**最高ウェイト**と呼ばれる. この $\pi_n(H)$ の固有値は第 2 節で求めた W_{π_n} の元と一致している.

次に, $\pi_n(X_+)$, $\pi_n(X_-)$ は式 (3.2) より

$$\pi_n(X_+) = -z_2\frac{\partial}{\partial z_1},\ \pi_n(X_-) = -z_1\frac{\partial}{\partial z_2}$$

となる. そして,

$$\pi_n(X_+){z_1}^{n-k}{z_2}^k = -z_2\frac{\partial}{\partial z_1}({z_1}^{n-k}{z_2}^k) = -(n-k){z_1}^{n-k-1}{z_2}^{k+1}, \tag{3.4}$$

$$\pi_n(X_-){z_1}^{n-k}{z_2}^k = -z_1\frac{\partial}{\partial z_2}({z_1}^{n-k}{z_2}^k) = -k{z_1}^{n-k+1}{z_2}^{k-1} \tag{3.5}$$

であるから, $\pi_n(X_\pm)$ は第 2 節で考えたウェイト空間 $\mathbb{C}{z_1}^{n-k}{z_2}^k$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ の隣り合ったものの間の写像を与えている. 特に $\pi_n(X_+){z_2}^n = 0,\ \pi_n(X_-){z_1}^n = 0$ である.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}{z_1}^n \arrow[loop below, "\pi_n(H)"] \arrow[r, bend left, "\pi_n(X_+)"] & \mathbb{C}{z_1}^{n-1}z_2 \arrow[l, "\pi_n(X_-)"] \arrow[loop below, "\pi_n(H)"] \arrow[r, bend left, "\pi_n(X_+)"] & \cdots \arrow[l, "\pi_n(X_-)"] \arrow[r, bend left, "\pi_n(X_+)"] & \mathbb{C}z_1{z_2}^{n-1} \arrow[l, "\pi_n(X_-)"] \arrow[loop below, "\pi_n(H)"] \arrow[r, bend left, "\pi_n(X_+)"] & \mathbb{C}{z_2}^n \arrow[l, "\pi_n(X_-)"] \arrow[loop below, "\pi_n(H)"]
\end{tikzcd}$$

4 $SU(2)$ の有限次元既約表現の分類

この節では, 先ず (π_n, V_n) の既約性を示そう. V_n の $SU(2)$-部分加群 W $(\{0\} \subsetneq W \subsetneq V_n)$ があれば, 命題 3.5 より W は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-部分加群であり, $SU(2) \approx S^3$ によって $SU(2)$ は単連結であることに注意すれば, 命題 3.2 (3) と命題 3.5 (2) より (π_n, V_n) が既約であることと $((d\pi_n)_{\mathbb{C}}, V_n)$ が既約であることは同値なので, よって $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-加群としての既約性を示せば良い.

命題 4.1 (π_n, V_n) は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-加群として既約である.

証明 $W \neq \{0\}$ を V_n の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-部分加群とするとき, $W = V_n$ を示せば良い.

$W \neq \{0\}$ なので, 少なくとも 1 つの 0 でない元 $w \in W$ が存在する.

$$w = a_0{z_1}^n + a_1{z_1}^{n-1}z_2 + \cdots + a_n{z_2}^n \in W$$

とすれば, 少なくとも 1 つの $a_k \in \mathbb{C}$ $(0 \le k \le n)$ は 0 でない. $k_0 := \min_{0\le k\le n}\{k\ ;\ a_k \neq 0\}$ とおく. 式 (3.4) を繰り返し用いて,

$$\pi_n(X_+)^{n-k_0}w = \pi_n(X_+)^{n-k_0}(a_{k_0}{z_1}^{n-k_0}{z_2}^{k_0}) = (-1)^{n-k_0}(n-k_0)!a_{k_0}{z_2}^n$$

であるから, ${z_2}^n \in W$ であり, 任意の k $(0 \leq k \leq n)$ に対して, 式 (3.5) を繰り返し用いて,

$$\pi_n(X_-)^{n-k}{z_2}^n = n(n-1)\cdots(k+1){z_1}^{n-k}{z_2}^k$$

であるから, ${z_1}^{n-k}{z_2}^k \in W$ である. ${z_1}^{n-k}{z_2}^k$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ は V_n の基底なので, W は V_n の基底を含む: $W \supset V_n$. さらに仮定より $W \subset V_n$ であるから, ゆえに $W = V_n$ が成り立つ. □

さて, (ρ, V) を $SU(2)$ の任意の表現とする. $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ を用いて, $iH = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(2)$ に対し, $\rho(iH) : V \to V$ を考えよう. $V(m)$ を第 2 節で考えたウェイト空間とする. $v \in V(m)$ のとき

$$\rho(\exp s(iH))v = \rho(t_{e^{is}})v = e^{ims}v \qquad (\forall s \in \mathbb{R})$$

であるから,

$$\rho(iH)v = ime^{ims}v|_{s=0} = imv$$

となる. 従って $\rho(iH)$ は対角化可能であり, $\rho(iH)$ によって V は固有空間分解でき, それは $SU(2)$ の極大トーラス T に関するウェイト分解と一致する. 特に

$$V(m) = \{v \in V\ ;\ \rho(iH)v = imv\}. \tag{4.1}$$

今後, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の表現 $(d\rho)_{\mathbb{C}}$ を単に $d\rho$ で表すことにする.

補題 4.1 $v \in V(m)$ のとき, 次のことが成り立つ.

(1) $\rho(X_\pm)v \in V(m \pm 2)$,

(2) $\rho(X_+)\rho(X_-)v - \rho(X_-)\rho(X_+)v = \rho(H)v = mv$.

証明 (1) $\rho(X_+)v \in V(m+2)$ を示す.

$$\begin{aligned} [iH, X_+] = iHX_+ - iX_+H &= i\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - i\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= i\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2iX_+ \end{aligned}$$

であるから, ρ の準同型性により

$$\rho(iH)\rho(X_+) - \rho(X_+)\rho(iH) = 2i\rho(X_+).$$

よって

$$\rho(iH)\rho(X_+) = \rho(X_+)\rho(iH) + 2i\rho(X_+) = \rho(X_+)(\rho(iH) + 2i)$$

となる. これを $v \in V$ に作用させれば, 式 (4.1) により $\rho(iH)v = imv$ であるから,

$$\rho(iH)\rho(X_+)v = \rho(X_+)(\rho(iH) + 2i)v = i(m+2)\rho(X_+)v.$$

よって, $\rho(X_+)v \in V(m+2)$ である. $\rho(X_-)v \in V(m-2)$ についても同様である.

(2)

$$\begin{aligned} [X_+, X_-] = X_+X_- - X_-X_+ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = H \end{aligned}$$

であるから, ρ の準同型性と式 (4.1) より

$$\rho(X_+)\rho(X_-)v - \rho(X_-)\rho(X_+)v = \rho(H)v = -i\rho(iH)v = mv$$

が成り立つ. $\square$

定理 4.1 $SU(2)$ の任意の有限次元既約表現はある (π_n, V_n) $(n \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ と同値である.

証明 V の最高ウェイトを n とおけば, 補題 4.1 より次のような図を得る.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, bend left, "\rho(X_+)"] & V(n-4) \arrow[l, "\rho(X_-)"] \arrow[r, bend left, "\rho(X_+)"] \arrow[loop below, "\rho(H)"] & V(n-2) \arrow[l, "\rho(X_-)"] \arrow[r, bend left, "\rho(X_+)"] \arrow[loop below, "\rho(H)"] & V(n) \arrow[l, "\rho(X_-)"] \arrow[loop below, "\rho(H)"]
\end{tikzcd}$$

$V(n)$ の 0 でない元 v_0 を取って, v_0 を含む V の最小の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-部分加群が V_n と同型であることを示したい.

$$v_k := \rho(X_-)^k v_0 \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

とおく. このとき, 先ず

$$\rho(X_+)v_k = k(n-k+1)v_{k-1} \quad (k > 0) \tag{4.2}$$

を示そう. k に関する帰納法で示す. $k = 1$ のときは, $\rho(X_+)v_0 = 0$ であるから, 補題 4.1 (2) より $\rho(X_+)v_1 = nv_0$ が成り立つ. $k-1$ まで成り立つと仮定すれば, $v_{k-1} \in V(n-2k+2)$ であるから, 補題 4.1 (2) より

$$\rho(X_+)v_k - \rho(X_-)\rho(X_+)v_{k-1} = (n-2k+2)v_{k-1}$$

であるが, $\rho(X_-)\rho(X_+)v_{k-1} = \rho(X_-)(k-1)(n-k+2)v_{k-2} = (k-1)(n-k+2)v_{k-1}$ なので

$$\rho(X_+)v_k = (n-2k+2)v_{k-1} + (k-1)(n-k+2)v_{k-1} = k(n-k+1)v_{k-1}.$$

よって, 式 (4.2) が成り立つ.

さて, 補題 4.1 (2) より $\rho(H)v_k = (n-2k)v_k$ であるが, V の有限次元性により $\rho(H)$ の固有値は有限個なので, v_k $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots)$ は有限個を除いて全て 0 である. よって, ある非負整数 m が存在して, 任意の $k \leq m$ に対して, $v_k = \rho(X_-)^k v_0 \neq 0$ かつ $v_{m+1} = \rho(X_-)^{m+1}v_0 = 0$ を満たす. $v_{m+1} = 0$ ならば, もちろん $\rho(X_+)v_{m+1} = 0$ であるから, 式 (4.2) より

$$0 = \rho(X_+)v_{m+1} = (m+1)(n-m)v_m.$$

ここで, $v_m \neq 0$ かつ $m+1 \neq 0$ であるから, 上式が成り立つためには $m = n$ でなければならない. このとき $v_0,\ v_1,\ \dots,\ v_n$ は $\rho(H)$ の互いに異なる固有値に対する固有ベクトルなので 1 次独立である. そこで $v_0,\ v_1,\ \dots,\ v_n$ で張られる V の部分空間を W とすれば, W は明らかに $\rho(H),\ \rho(X_+),\ \rho(X_-)$ で不変であり, ゆえに W は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-部分加群である. 従って, (ρ, V) の既約性により $W = V$ となる.

$${v_1}' := -\frac{1}{n}v_1,\ {v_2}' := \frac{1}{n(n-1)}v_2,\ \dots,\ {v_n}' := (-1)^n\frac{1}{n!}v_n$$

とおけば,

$$\begin{aligned}\rho(X_-){v_k}' &= (-1)^k\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}\rho(X_-)v_k\\ &= -(n-k){v_{k+1}}' \end{aligned}\tag{4.3}$$

であり, 式 (4.2) を用いれば,

$$\begin{aligned}\rho(X_+){v_{k+1}}' &= (-1)^{k+1}\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k)}\rho(X_+)v_{k+1}\\ &= (-1)^{k+1}(k+1)\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}v_k\\ &= -(k+1){v_k}'\end{aligned}\tag{4.4}$$

も得られる. 従って ${v_0}'$, ${v_1}'$, ..., ${v_n}'$ に対して, それぞれ ${z_2}^n$, $z_1{z_2}^{n-1}$, ..., ${z_1}^n$ を対応させる $\mathbb{C}{v_0}'\oplus\mathbb{C}{v_1}'\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}{v_n}'$ から V_n への線型写像 A を考えれば, 式 (4.3), (4.4) を式 (3.4), (3.5) と比較することにより, A は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-加群としての同型写像である. すなわち, 次の図式が可換になる.

$$\begin{tikzcd}\bigoplus_{j=1}^{n}\mathbb{C}{v_j}' \arrow[r] \arrow[d, "A"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \bigoplus_{j=1}^{n}\mathbb{C}{v_j}' \arrow[d, "A"] \\ V_n \arrow[r] & V_n\end{tikzcd}$$

よって, 命題 3.6 より $(d\rho,\mathbb{C}{v_0}'\oplus\mathbb{C}{v_1}'\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}{v_n}')$ と $(d\pi_n,V_n)$ が同値となり, さらに命題 3.3 より $(\rho,\mathbb{C}{v_0}'\oplus\mathbb{C}{v_1}'\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}{v_n}')$ と (π_n,V_n) が同値となる. 従って, 定理が証明された. □

さらに, $SU(2)$ の任意の有限次元表現 (ρ,V) は完全可約であるから, (ρ,V) は幾つかの既約表現 (π_n,V_n) の直和に分解される:

$$(\rho,V)\simeq\bigoplus_{j=1}^{r}\left(\pi_{n(j)},V_{n(j)}\right)\qquad\left(\dim V=\sum_{j=1}^{r}\dim V_{n(j)}\right).\tag{4.5}$$

5 $SO(3)$ の有限次元既約表現の構成と分類

この節では $SU(2)$ の表現と $SO(3)$ の表現が 2 重被覆写像を通じて, どのように関係するかを考察する. 先ず, $SU(2)$ と $SO(3)$ の関係を表した次の定理を思い出そう.

定理 5.1 $SU(2)$ の随伴表現 Ad は $SU(2)$ から $SO(3)$ への全射準同型で, 2 対 1 の写像である. 特に, その核は $\{\pm I_2\}$ である: $SU(2)/\{\pm I_2\}\simeq SO(3)$.

そこで, (ρ,V) を $SO(3)$ の表現とすれば, 定理 5.1 の準同型 Ad と合成することにより, $SU(2)$ の表現 $\tilde{\rho}: SU(2)\to GL(V)$ が得られる[*10]. 実際, $g\in SU(2)$ に対して, $\tilde{\rho}(g)=\rho(\mathrm{Ad}\,g)$ であるから, 任意の g_1, $g_2\in SU(2)$ に対して,

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(g_1g_2) &= \rho(\mathrm{Ad}\,g_1g_2)=\rho((\mathrm{Ad}\,g_1)(\mathrm{Ad}\,g_2))\\ &= \rho(\mathrm{Ad}\,g_1)\rho(\mathrm{Ad}\,g_2)\\ &= \tilde{\rho}(g_1)\tilde{\rho}(g_2)\end{aligned}$$

[*10] これを表現 (ρ,V) の $SU(2)$ への “引き戻し” または “持ち上げ” という.

が成り立つ．よって $(\tilde{\rho}, V)$ は $SU(2)$ の表現である．

$$\begin{tikzcd}
 & GL(V) \\
SU(2) \arrow[ur, "\tilde{\rho}"] \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] \arrow[ur, phantom, shift right=4, "\circlearrowleft"] & SO(3) \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

そして, $(\tilde{\rho}, V)$ が既約でなければ, $SU(2)$-部分加群 W $(\{0\} \subsetneq W \subsetneq V)$ が存在する．ここで Ad の全射性により, W は $SO(3)$-不変でなければならないから, (ρ, V) は既約でない．すなわち, (ρ, V) が既約ならば $(\tilde{\rho}, V)$ も既約である．ゆえに, 定理 4.1 より $(\tilde{\rho}, V)$ はある (π_n, V_n) と同値であるが, 定理 5.1 より $\operatorname{Ker}\mathrm{Ad} = \{\pm I_2\}$ であるから, $\tilde{\rho}(-I_2)$ は V の恒等写像である．一方,

$$\pi_n(-I_2){z_1}^{n-k}{z_2}^k = (-z_1)^{n-k}(-z_2)^k = (-1)^n {z_1}^{n-k}{z_2}^k$$

であるから, n は偶数でなければならない[*11]．従って, $n = 2m$ $(m \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ ならば, $\rho_m \circ \mathrm{Ad} = \pi_{2m}$ を満たす $SO(3)$ の既約表現 (ρ_m, V) が well-defined に定まり, $SO(3)$ の任意の既約表現 (ρ, V) はある (ρ_m, V) と同値である．$m \neq m'$ ならば, (ρ_m, V) と $(\rho_{m'}, V')$ の表現空間の次元は異なるので, $(\rho_m, V) \not\simeq (\rho_{m'}, V')$ も分かる．

さて, 具体的に $SO(3)$ の既約表現を構成しよう．$SU(2)$ の表現を構成したときのアナロジーで, $SO(3)$ の $\mathbb{R}^3$ 上の複素係数 m 次同次多項式の空間 W_m における表現 (L_g, W_m) が

$$(L_g f)(x) := f(g^{-1}x) \tag{5.1}$$

によって定義できる．ここで, $g \in SO(3),\ f \in W_m,\ x \in \mathbb{R}^3$ である．しかし $m \geq 2$ ならば (L_g, W_m) は既約でないことが分かる．例えば, W_2 は ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$ で張られる $SO(3)$-部分加群を含む．従って, $SO(3)$ の既約表現を得るには W_m の既約 $SO(3)$-部分加群として Laplace 作用素の核, すなわち調和多項式の空間を考えれば良い．

$\mathbb{R}^3$ 上の **Laplace 作用素** (Laplace operator) Δ が

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}$$

で定義される．式 (5.1) の L_g と Laplace 作用素 Δ について次の関係が成り立つ．

命題 5.1 $g \in SO(3)$ のとき, L_g と Δ は可換である．すなわち

$$\Delta \circ L_g = L_g \circ \Delta.$$

証明 $y := g^{-1}x$ とおく．$g = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3},\ x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3)$ と書けば, $y_j = \sum_{i=1}^3 g_{ij}x_i$ であるから, $\mathbb{R}^3$ 上の任意の函数 f に対して,

$$\frac{\partial(L_g f)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial y_j}(y)\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^3 g_{ij}\frac{\partial f}{\partial y_j}(y)$$

*11 $\pi_n(-I_2)$ は V_n の恒等写像である．

を得る．よって

$$((\Delta \circ L_g)f)(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 (L_g f)}{\partial {x_i}^2}(x) = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} g_{ik} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \left(\sum_{l=1}^{3} g_{il} \frac{\partial f}{\partial y_l}(y) \right)$$
$$= \sum_{k,\ l=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} g_{ik} g_{il} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_l}(y) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial {y_k}^2}(y)$$
$$= (\Delta f)(y) = ((L_g \circ \Delta) f)(x)$$

が成り立つ[*12]．f は任意であるから, 従って $\Delta \circ L_g = L_g \circ \Delta$ を得る． □

Laplace 作用素の W_m への制限 $\Delta|_{W_m} : W_m \to W_{m-2}$ の核を U_m とおく: $U_m := \{f \in W_m \ ; \ \Delta|_{W_m} f = 0\}$. U_m の元は m 次**調和多項式** (harmonic polynomial) と呼ばれる．このとき, $\Delta|_{W_m}$ は全射であることが示せるので,

$$\dim W_m = \frac{(m+1)(m+2)}{2}, \ \dim U_m = \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} = 2m+1.$$

$L^m := L_g|_{U_m}$ とおこう．$f \in U_m$ ならば, 命題 5.1 により任意の $g \in SO(3)$ に対して $\Delta L^m f = L^m \Delta f = 0$ であるから, $L^m f \in U_m$ となる．すなわち U_m は $SO(3)$-不変であり, U_m の $SO(3)$-部分加群は $\{0\}$ と U_m 以外に存在しないので, よって $SO(3)$ の表現 (L^m, U_m) は既約である．さらに $L^m(g)$ の行列成分は g の成分の多項式であるから, 準同型 L^m は連続であり, 従って L^m は可微分となる．

定理 5.2 (1) L^m は ρ_m $(m \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ と同値である．
(2) $SO(3)$ の任意の有限次元既約表現はある (L^m, U_m) $(m \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ と同値である．

証明 (1) $\tau_m = L^m \circ \mathrm{Ad}$ とおけば, τ_m は L^m の $SU(2)$ への引き戻しであるから τ_m は $SU(2)$ の U_m における表現となる．$f_m(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - i x_2)^m \in U_m$ とおく．$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ のとき

$$\mathrm{Ad}\,(\exp t(iH)) = \mathrm{Ad} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t & 0 \\ \sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in SO(3)$$

であるから[*13],

$$(\tau_m(\exp t(iH)) f_m) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = f_m \left(\begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t & 0 \\ \sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = f_m \begin{bmatrix} x_1 \cos 2t + x_2 \sin 2t \\ -x_1 \sin 2t + x_2 \cos 2t \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$= \{(x_1 \cos 2t + x_2 \sin 2t) - i(-x_1 \sin 2t + x_2 \cos 2t)\}^m$$
$$= \{(\cos 2t + i \sin 2t)(x_1 - i x_2)\}^m$$
$$= e^{2imt}(x_1 - i x_2)^m.$$

よって,

$$\tau_m(iH) f_m = \frac{d}{dt}(\tau_m(\exp t(iH)) f_m \Big|_{t=0} = 2im f_m$$

[*12] 下から 2 行目の 2 つ目の等号は, $k = l$ ならば $\sum_{i=1}^{3} g_{ik} g_{il} = 1$, $k \neq l$ ならば $\sum_{i=1}^{3} g_{ik} g_{il} = 0$ を使った.
[*13] 2 つ目の等号は, 拙著『$SU(2)$ と $SO(3)$ の関係』を参照されたい.

が成り立つ. $d\tau_m$ の複素化を考えれば,

$$\tau_m(H) = 2mf_m \tag{5.2}$$

を得る. 式 (4.5) より $SU(2)$ の表現 (τ_m, U_m) は幾つかの既約表現 (π_n, V_n) の直和に分解される:

$$(\tau_m, U_m) \simeq \bigoplus_{j=1}^{r} \left(\pi_{n(j)}, V_{n(j)}\right). \tag{5.3}$$

式 (5.2) より, ある $\pi_{n(j)}$ はウェイト $2m$ を持つので, 式 (3.3) より $2m \leq n(j)$, すなわち

$$2m + 1 \leq n(j) + 1.$$

一方, 式 (5.3) より

$$2m + 1 = \dim U_m \geq \dim V_{n(j)} = n(j) + 1.$$

よって $2m + 1 = n(j) + 1$ が成り立ち, $\tau_m = \pi_{n(j)}$ は既約であることが分かる. $L^m \circ \mathrm{Ad} = \pi_{2m} = \rho_m \circ \mathrm{Ad}$ であるから, 従って L^m は ρ_m と同値である.

(2) $SO(3)$ の任意の既約表現 (ρ, V) はある (ρ_m, V) と同値であり, (1) より (ρ_m, V) は (L^m, U_m) と同値であるから, 従って (ρ, V) は (L^m, U_m) と同値である. □

さらに, $SO(3)$ の任意の有限次元表現 (ρ, V) は完全可約であるから, (ρ, V) は幾つかの既約表現 (L^m, U_m) の直和に分解される:

$$(\rho, V) \simeq \bigoplus_{j=1}^{r} \left(L^{m(j)}, U_{m(j)}\right) \qquad \left(\dim V = \sum_{j=1}^{r} \dim U_{m(j)}\right).$$

以上で, $SU(2)$ と $SO(3)$ の有限次元既約表現の分類が完成したわけであるが, ここでは微分表現を利用し, Lie 環の表現論によって議論した. 他の方法としては, コンパクト位相群上の Haar 測度と指標を用いる方法がある. コンパクト位相群では, 表現の既約性の判定, 表現の既約表現への分解の仕方, 表現の同値性などが指標のみによって知られるため, 重要な概念となっている.

指標理論による $SU(2)$ と $SO(3)$ の有限次元既約表現の分類を行う方法は Sugiura [4], 杉浦, 山内 [5] などを参照されたい.

References

[1] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, Graduate Texts in Mathematics 222, Springer, 2003.

[2] 小林俊行, 大島利雄『リー群と表現論』現代数学の基礎, 岩波書店, 2005.

[3] 松木敏彦『リー群入門』日評数学選書, 日本評論社, 2005.

[4] M. Sugiura, *Unitary Representation and Harmonic Analysis: An Introduction*, 2nd ed., North-Holland Mathematical Library 44, North-Holland, 1990.

[5] 杉浦光夫, 山内恭彦『連続群論入門』新数学シリーズ 18, 培風館, 1960.