$U(1)$ の有限次元複素表現

T. Nakagawa

January 5, 2009

Lie 群の最も簡単な例の 1 つである $U(1)$ の既約表現を決定し, $U(1)$ の任意の有限次元複素表現はその既約表現の直和に分解されることを示す. キーワードは "コンパクト位相群" と "可換群" である.

1 コンパクト位相群の表現の完全可約性

以下, V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とする.

(ρ, V) を群 G の表現とする. V の任意の G-部分加群 (G-不変部分空間) W_1 に対し, $V = W_1 \oplus W_2$ を満たす G-部分加群 W_2 が存在するとき, 表現 (ρ, V) は**完全可約** (completely reducible) と呼ばれる. 同値な表現を表す記号 "$\simeq$" を使えば, $(\rho, V) \simeq (\rho_{W_1}, W_1) \oplus (\rho_{W_2}, W_2)$ と書ける. ここで, $\rho_{W_j} : G \ni g \mapsto \rho(g)|_{W_j} \in GL(W_j)$ ($j = 1,\ 2$) は G の部分表現である.

下の命題 1.1 を証明するために, 次の補題を用意しよう.

補題 1.1 (ρ, V) を群 G の表現とする. このとき, V の既約 G-部分加群 W ($\{0\} \subsetneq W \subset V$) が存在する.

証明 (ρ, V) が既約ならば $W = V$ とすれば良い. 既約でなければ, V より小さい G-部分加群 W_1 を考える. W_1 が既約でなければ, さらに G-部分加群 $W_2 \subsetneq W_1$ を考える. $\dim V < \infty$ なので, よって $\{0\} \subsetneq W \subsetneq \cdots \subsetneq W_2 \subsetneq W_1$ を満たす W が存在する. $\square$

補題 1.1 と表現の完全可約性から直ちに次の命題が成り立つ.

命題 1.1 群 G の完全可約な表現 (ρ, V) は幾つかの既約部分表現の直和である: $(\rho, V) \simeq \bigoplus_{j=1}^{r} (\rho_{W_j}, W_j)$.

換言すれば, V の G-部分加群 $W_1,\ \ldots,\ W_r$ が存在して,

$$V = \bigoplus_{j=1}^{r} W_j$$

となり, $\rho_{W_j} : G \ni g \mapsto \rho(g)|_{W_j} \in GL(W_j)$ によって定められる表現 (ρ_{W_j}, W_j) は全て既約だというのである.

証明 $\dim V$ に関する帰納法で証明する. 先ず (ρ, V) が既約ならば明らかである. 次に (ρ, V) が既約でなければ, 補題 1.1 より V の既約 G-部分加群 W_1 が存在する. (ρ, V) は完全可約であるから, ある G-部分加群 $W_1{}'$ が存在して, $V = W_1 \oplus W_1{}'$ と書けるが, $\dim W_1{}' < \dim V$ なので, 帰納法の仮定により $W_1{}'$ は幾つかの既約 G-部分加群の直和である. $\square$

命題 1.1 のように, 表現 (ρ, V) が既約部分表現の直和として表されるとき, その既約部分表現の直和を表現 (ρ, V) の**既約分解** (irreducible decomposition) という.

下の定理 1.1 はコンパクト位相群に関する定理であるが, それを証明するためにコンパクト位相群上の Haar (ハール) 測度と呼ばれる不変測度の概念が必要になるので, 簡単にまとめておこう.

G を局所コンパクト位相群とする. G 上の 0 でない Borel (ボレル) 測度 μ で, 任意の $g \in G$ と任意の Borel 集合 $E \subset G$ に対して, $\mu(gE) = \mu(E)$ ($gE := \{gx \,;\, x \in E\}$) を満たすものを G 上の**左 Haar 測度** (left Haar measure) という. G 上には正の定数倍を除いて一意的に左 Haar 測度が存在する. G がコンパクト位相群だと, 左 Haar 測度は右 Haar 測度でもある. そしてコンパクト位相群の Haar 測度による全体積は有限値で, 普通は全体積が 1 であるというように正規化する: $\int_G d\mu(g) = 1$.

例 1.1 1 次元ユニタリ群 $U(1) = \{e^{i\theta} \,;\, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ は円周 S^1 と同相であるからコンパクトであり, $U(1)$ 上の正規化された Haar 測度は次のようになる:

$$\int_{U(1)} f(g)dg = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) d\theta \qquad (f \in C_c(U(1))).$$

ここで, $C_c(U(1))$ は $U(1)$ 上のコンパクト台を持つ複素数値連続函数のなすベクトル空間である.

群 G の表現 (ρ, V) が**ユニタリ表現** (unitary representation) であるとは, V 上にエルミート内積 $(\cdot|\cdot)$ が存在して, 任意の $g \in G$ に対して, $\rho(g)$ がこの内積に関するユニタリ作用素となることをいう. すなわち (ρ, V) がユニタリ表現であるとは, 任意の $g \in G$ に対して

$$(\rho(g)u|\rho(g)v) = (u|v) \qquad (u,\ v \in V)$$

が成り立つことをいう[*1].

定理 1.1 コンパクト位相群 G の任意の表現 (ρ, V) は V 上の適当な内積に関しユニタリ表現となる.

証明 V 上のエルミート内積 $(\cdot|\cdot)$ を 1 つ取る. コンパクト位相群 G 上の Haar 測度 dg を用いて, V 上の新しいエルミート内積 $(\cdot|\cdot)_\rho$ が

$$(u|v)_\rho := \int_G (\rho(g)u|\rho(g)v)dg \qquad (u,\ v \in V)$$

で定義できる. 実際, 内積の公理を確かめれば良いが, 歪対称性と線型性は明らかなので, 正値性のみ確かめる. 表現 ρ の連続性によって被積分函数は G 上の連続函数であり, $(\cdot|\cdot)$ の正値性により任意の $g \in G$ に対して $(\rho(g)u|\rho(g)u) \geq 0$ を満たすので, $(u|u)_\rho \geq 0$ が成り立つ. $(u|u)_\rho = 0$ とすれば, 任意の $g \in G$ に対して $(\rho(g)u|\rho(g)u) = 0$ となり, 特に $g = e$ として $(u|u) = 0$, ゆえに $u = 0$ となる.

さらに, 任意の $g_0 \in G$ に対して,

$$\begin{aligned}(\rho(g_0)u|\rho(g_0)v)_\rho &= \int_G (\rho(g)\rho(g_0)u|\rho(g)\rho(g_0)v)dg = \int_G (\rho(gg_0)u|\rho(gg_0)v)dg \\ &= \int_G (\rho(g)u|\rho(g)v)dg = (u|v)_\rho.\end{aligned}$$

従って, (ρ, V) は内積 $(\cdot|\cdot)_\rho$ に関してユニタリ表現である. □

定理 1.1 のように, V に内積を与えて表現 (ρ, V) をユニタリ表現にできるとき, 表現 (ρ, V) は**ユニタリ化可能** (unitarizable) であるという.

[*1] 線型写像 $\rho(g)$ は可逆なので全単射である.

次の定理は群 G がコンパクト位相群である必要はない.

定理 1.2 群 G の任意のユニタリ表現 (ρ, V) は完全可約である.

証明 (ρ, V) が既約ならば明らかに完全可約である. 既約でなければ, 補題 1.1 より V の既約 G-部分加群 W $(\{0\} \subsetneq W \subsetneq V)$ が存在する. このとき $W^\perp$ を V におけるエルミート内積 $(\cdot|\cdot)$ に関する W の直交補空間とする: $W^\perp = \{v \in V\ ;\ (v|w) = 0,\ \forall w \in W\}$. 任意の $g \in G$, $w \in W$, $v \in W^\perp$ に対して, $\rho(g^{-1})w \in W$ であるから,

$$(\rho(g)v|w) = (v|\rho(g)^{-1}w) = (v|\rho(g^{-1})w) = 0.$$

よって $\rho(g)v \in W^\perp$ となり, $W^\perp$ は V の G-部分加群である. ゆえに, $V = W \oplus W^\perp$ と書けるので, (ρ, V) は完全可約である. □

従って, 定理 1.1 と定理 1.2 より, 次の定理を得る.

定理 1.3 コンパクト位相群の任意の表現は完全可約である.

2 Schur の補題

この節では表現論で最も基本的な定理の 1 つである Schur (シュア) の補題を述べ, 可換群の有限次元複素既約表現は 1 次元であることを示そう.

定理 2.1 (Schur の補題) (ρ, V) を群 G の既約表現とする. 任意の $g \in G$ に対して,

$$A\rho(g) = \rho(g)A$$

を満たす V の線型変換 A に対して, ある $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して, $A = \lambda\,\mathrm{id}_V$ となる. ここで, id_V は V の恒等写像である.

証明 A の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対応する固有空間を V_λ とおく*2: $V_\lambda = \{v \in V\ ;\ Av = \lambda v\}$. 任意の $g \in G$ に対して,

$$A(\rho(g)v) = \rho(g)(Av) = \lambda(\rho(g)v) \qquad (v \in V_\lambda).$$

よって $\rho(g)v \in V_\lambda$ となり, V_λ は V の G-部分加群である. (ρ, V) は既約なので, $V_\lambda = V$ でなければならない. ゆえに, 任意の $v \in V$ に対して, $Av = \lambda v$ となる. すなわち $A = \lambda\,\mathrm{id}_V$ である. □

次の定理は Schur の補題の系として得られる.

定理 2.2 可換群 G の任意の既約表現 (ρ, V) は 1 次元である.

証明 任意の $g,\ h \in G$ に対して, $\rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g)$ が成り立つので, Schur の補題より, ある $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して, $\rho(g) = \lambda\,\mathrm{id}_V$ となる. 特に, V の全ての部分空間は G-部分加群となる. 従って, (ρ, V) が既約ならば, $\dim V = 1$ でなければならない. □

*2 A は有限次元複素ベクトル空間 V の線型写像であるから少なくとも 1 つの固有値を持つ.

3 $U(1)$ の有限次元複素表現

1 次元ユニタリ群 $U(1) = \{g \in \mathbb{C} \ ; \ |g| = 1\}$ は可換コンパクト Lie 群であるから, 定理 1.2 より $U(1)$ の任意の有限次元複素表現は既約表現の直和に分解され, その既約表現たちは定理 2.2 より全て 1 次元である. そこで, $U(1)$ の既約表現を決定しよう.

先ず, 次の補題を用意する.

補題 3.1 加法群 $\mathbb{R}$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への微分可能準同型 f は全て

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{\alpha x} \in \mathbb{C}^\times \qquad (\exists \alpha \in \mathbb{C})$$

の形である.

証明 f は任意の $x, \ y \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たす. $f'(0) = \alpha$ とおけば,

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = f(x) \lim_{y \to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = \alpha f(x)$$

が成り立ち, $f(x) = Ce^{\alpha x}$ (C : 任意定数) を得る. f は $f(0) = 1$ を満たすから, $C = 1$ となる. ゆえに $f(x) = e^{\alpha x}$ を得る. 常微分方程式の解の一意性により, 解はこれに限る. □

$\mathbb{C}^\times \simeq GL(1, \mathbb{C})$ によって f を $\mathbb{R}$ から $GL(1, \mathbb{C})$ の群準同型とみなせば, f は $\mathbb{R}$ の 1 次元表現を与える. さらに, $|f(x)| = 1$ を満たすので, f は $\mathbb{R}$ のユニタリ表現である. 同様の考えで, 次の $U(1)$ の既約表現も 1 次元ユニタリ表現である.

定理 3.1 $U(1)$ の既約ユニタリ表現の同値類は, $\{\rho_m \ ; \ m \in \mathbb{Z}\}$ で与えられる. ここで, $\rho_m(g)v = g^m v$ $(g \in U(1), \ v \in V \simeq \mathbb{C})$ である.

証明 定理 2.2 より $U(1)$ の既約表現 ρ は 1 次元であるから, $U(1)$ から $\mathbb{C}^\times$ への微分可能準同型を全て求めればよい. $h : \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{ix} \in U(1)$ と $\rho : U(1) \ni g \mapsto \rho(g) \in \mathbb{C}^\times$ を合成すれば, $\rho \circ h : \mathbb{R} \ni x \mapsto \rho(e^{ix}) \in \mathbb{C}^\times$ となるので, 補題 3.1 より, ある $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\rho(e^{ix}) = e^{\alpha x}. \tag{3.1}$$

(3.1) の写像が well-defined であるためには

$$e^{2\pi\alpha} = 1,$$

すなわち $\alpha \in i\mathbb{Z}$ が必要十分である.

必要なこと: (3.1) の写像が well-defined であるとすれば, 周期性 $e^{ix} = e^{i(x+2\pi)}$ より,

$$\begin{aligned} e^{ix} = e^{i(x+2\pi)} &\Rightarrow \rho(e^{ix}) = \rho\left(e^{i(x+2\pi)}\right) \\ &\Leftrightarrow e^{\alpha x} = e^{\alpha(x+2\pi)} \qquad (\exists \alpha \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

よって $e^{2\pi\alpha} = 1$ となるから, $\alpha \in i\mathbb{Z}$ でなければならない.

十分なこと: $\alpha = im$ $(m \in \mathbb{Z})$ とする. 周期性 $e^{ix} = e^{i(x+2\pi)}$ より,

$$\rho(e^{ix}) = e^{imx}, \ \rho\left(e^{i(x+2\pi)}\right) = e^{im(x+2\pi)} = e^{imx}.$$

よって $\rho(e^{ix}) = \rho\left(e^{i(x+2\pi)}\right)$ となるから, (3.1) の写像は well-defined である.

ゆえに $m \in \mathbb{Z}$ に対して, $\alpha = im$, $\rho = \rho_m$ と書けば, $\rho_m(g) = g^m$ と表せる. さらに, $\rho_m \simeq \rho_n$ $(m,\ n \in \mathbb{Z})$ ならば $m = n$ が成り立つ. 以上で定理が証明された. $\square$

従って, 定理 3.1 より, $U(1)$ の任意の表現 (ρ, V) の既約分解は次のようになる:

$$(\rho, V) \simeq \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} (\rho_m, \mathbb{C}) \quad (\dim V \text{ 個の既約表現の直和 }).$$

注意 3.1 この既約分解は, $\mathbb{Z}$ から $\dim V$ 個の互いに異なる整数を選べば良いので, 分解の仕方はいくらでもある.

References

[1] 小林俊行, 大島利雄『リー群と表現論』現代数学の基礎, 岩波書店, 2005.

[2] 松木敏彦『リー群入門』日評数学選書, 日本評論社, 2005.

[3] 杉浦光夫, 山内恭彦『連続群論入門』新数学シリーズ 18, 培風館, 1960.