$SU(2)$ と $SO(3)$ の関係

T. Nakagawa

August 22, 2008

$SU(2)$ の随伴表現は $SU(2)$ から $SO(3)$ への全射準同型で 2 対 1 の写像である, という回転群の表現でよく知られた定理を証明する．この証明は, やや専門的な数学を使えばスマートにできるが, 線型代数と群論の基本的な知識だけでも証明することができるので, ここでは後者を採用することにした.

1 随伴表現

回転群 $SU(2)$ と $SO(3)$ の定義から始めよう[*1].

$$\begin{aligned}SU(2) &:= \{g \in M(2,\mathbb{C})\,;\, g^* g = I,\ \det g = 1\},\\ SO(3) &:= \{g \in M(3,\mathbb{R})\,;\, {}^t g g = I,\ \det g = 1\}.\end{aligned}$$

ここで, $M(2,\mathbb{C})$ は 2×2 複素行列全体, $M(3,\mathbb{R})$ は 3×3 実行列全体, I は単位行列である.

$SU(2)$ は $\mathbb{C}^2$ の標準的 Hermite (エルミート) 内積と向きを保つ変換群で, **特殊ユニタリ群** (special unitary group) という．$SO(3)$ は $\mathbb{R}^3$ の標準内積と向きを保つ変換群で, **特殊直交群** (special orthogonal group) という.

いま $M(2,\mathbb{C})$ の元でトレースが 0 となる歪 Hermite 行列全体を考える:

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in M(2,\mathbb{C})\,;\, X^* = -X,\ \mathrm{tr}X = 0\}. \tag{1.1}$$

これは $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であることに注意する[*2]．そこで, $X \in \mathfrak{su}(2)$, $g \in SU(2)$ に対して, $\mathrm{Ad}(g)X := gXg^{-1}$ と定めれば, $\mathrm{Ad}(g)$ は $\mathfrak{su}(2)$ 上の線型変換である．実際, $a,\ b \in \mathbb{R}$, $X,\ Y \in \mathfrak{su}(2)$ に対して,

$$(\mathrm{Ad}(g))(aX+bY) = g(aX+bY)g^{-1} = agXg^{-1} + bgYg^{-1} = a\mathrm{Ad}(g)X + b\mathrm{Ad}(g)Y$$

より線型性が分かる．さらに,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}(g)X)^* &= (gXg^{-1})^* = gX^*g^{-1} = -gXg^{-1} = -\mathrm{Ad}(g)X,\\ \mathrm{tr}(\mathrm{Ad}(g)X) &= \mathrm{tr}(gXg^{-1}) = \mathrm{tr}X = 0.\end{aligned}$$

ゆえに $\mathrm{Ad}(g)X \in \mathfrak{su}(2)$ となる．また任意の $X \in \mathfrak{su}(2)$ に対して,

$$\mathrm{Ad}(gh)X = (gh)X(gh)^{-1} = g(hXh^{-1})g^{-1} = g(\mathrm{Ad}(h)X)g^{-1} = \mathrm{Ad}(g)\mathrm{Ad}(h)X$$

[*1] これらの群は Lie 群, つまり群構造が定義された多様体であって群演算が可微分となっているが, Lie 群を知らない読者は特に気にしなくても良い.

[*2] $\mathfrak{su}(2)$ という表記を用いたのは, それが $SU(2)$ の Lie 環であることに他ならない．Lie 環とは, Lie 群の単位元における接空間に括弧積の構造が入ったものである．Lie 環を知らない読者は, やはり気にしなくても良いであろう.

が成り立つから, $\mathrm{Ad}(gh) = \mathrm{Ad}(g)\mathrm{Ad}(h)$ となる. これは $\mathrm{Ad} : SU(2) \to GL(\mathfrak{su}(2))$ が群準同型写像であることを表している. ここで, $GL(\mathfrak{su}(2))$ は $\mathfrak{su}(2)$ 上の一次変換のなす群である.

従って $SU(2)$ の $\mathfrak{su}(2)$ への作用が次のように定義できる:

$$SU(2) \times \mathfrak{su}(2) \ni (g, X) \mapsto \mathrm{Ad}(g)X \in \mathfrak{su}(2).$$

$SU(2)$ は Ad を経由して $\mathfrak{su}(2)$ に線型変換として作用している.

$$SU(2) \times \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\mathrm{Ad}} GL(\mathfrak{su}(2)) \times \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$$

Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ と準同型 Ad の組 $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{su}(2))$ を Lie 群 $SU(2)$ の**随伴表現** (adjoint representation) という.

2 $SU(2)$ と $SO(3)$ の関係

本題に入ろう. 証明したいのは冒頭で述べたとおり次の定理である.

定理 2.1 $SU(2)$ の随伴表現は $SU(2)$ から $SO(3)$ への全射準同型で, 2 対 1 の写像である. 特に, その核は $\{\pm I\}$ である[*3].

証明 (1.1) の条件を満たす行列を具体的に求めると, $SU(2)$ の Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ は

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} ci & -a+bi \\ a+bi & -ci \end{bmatrix} ;\, a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

と書くことができる. よって,

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ e_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

が $\mathfrak{su}(2)$ の 1 つの基底である[*4]. 実際, $X \in \mathfrak{su}(2)$ は $X = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R})$ と表され, $e_1,\ e_2,\ e_3$ は 1 次独立でこの表示は一意的である. $\mathfrak{su}(2)$ 上の内積が

$$(X|Y) := \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(XY^*) \quad (X,\ Y \in \mathfrak{su}(2)) \tag{2.1}$$

で定義できる. 内積の公理を満たすことを確認すれば良いが, 対称性と線型性は明らかなので, 正値性のみ確かめる.

$$\begin{aligned}(X|X) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} ci & -a+bi \\ a+bi & -ci \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ci & -a+bi \\ a+bi & -ci \end{bmatrix}^* \right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} ci & -a+bi \\ a+bi & -ci \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -ci & a-bi \\ -a-bi & ci \end{bmatrix} \right) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

より $(X|X) \geq 0$ で, $(X|X) = 0$ ならば $a = b = c = 0$, ゆえに $X = O$ である. この内積により, $\mathfrak{su}(2)$ は 3 次元実 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ と同一視される. また (2.1) の内積に関して, $e_1,\ e_2,\ e_3$ という $\mathfrak{su}(2)$ の基底は

$$(e_i|e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

[*3] もう少し言うと, $SU(2)$ は $SO(3)$ の 2 重被覆群となっているが, 被覆群については立ち入らないことにした.

[*4] 行列 $\sigma_1 = -ie_1$, $\sigma_2 = ie_2$, $\sigma_3 = -ie_3$ は Pauli のスピン行列と呼ばれ, 量子力学で登場する.

となるので, $e_1,\ e_2,\ e_3$ は正規直交基底でもある．任意の $g \in SU(2),\ X,\ Y \in \mathfrak{su}(2)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Ad}(g)X|\mathrm{Ad}(g)Y) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(gXg^{-1}\left(gYg^{-1}\right)^*\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(gXg^{-1}gY^*g^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY^*) \\
&= (X|Y)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これは $\mathrm{Ad}(g)$ が $\mathfrak{su}(2)$ の内積, つまり $\mathbb{R}^3$ の内積を保つことを意味する．従って, $\mathrm{Ad}(g)$ は $\mathbb{R}^3$ 上の直交変換であるので, $O(3)$ の元と思える．そこで $\mathrm{Ad}(g)$ を行列表示しよう．$SU(2)$ の元として,

$$
h_\theta := \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix},\ k_\varphi := \begin{bmatrix} \cos(\varphi/2) & -\sin(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{bmatrix} \tag{2.2}
$$

とすれば[*5],

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(h_\theta)e_1 &= \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ie^{i\theta} \\ ie^{-i\theta} & 0 \end{bmatrix} \\
&= e_1\cos\theta + e_2\sin\theta, \\
\mathrm{Ad}(h_\theta)e_2 &= -e_1\cos\theta + e_2\sin\theta, \\
\mathrm{Ad}(h_\theta)e_3 &= e_3
\end{aligned}
$$

となる．k_φ についても同様に行えば,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(k_\varphi)e_1 &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi/2) & -\sin(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\varphi/2) & \sin(\varphi/2) \\ -\sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\sin\varphi & i\cos\varphi \\ i\cos\varphi & i\sin\varphi \end{bmatrix} \\
&= e_1\cos\varphi - e_3\sin\varphi, \\
\mathrm{Ad}(k_\varphi)e_2 &= e_2, \\
\mathrm{Ad}(k_\varphi)e_3 &= e_1\sin\varphi + e_3\cos\varphi
\end{aligned}
$$

となる．よって $\mathrm{Ad}(h_\theta),\ \mathrm{Ad}(k_\varphi)$ の表現行列は, それぞれ

$$
\mathrm{Ad}(h_\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{Ad}(k_\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{2.3}
$$

で与えられる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "\text{表現行列}"] \arrow[d, "\wr"] & \mathbb{R}^3 \\
\mathfrak{su}(2) \arrow[r, "\mathrm{Ad}(g)"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathfrak{su}(2) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}
$$

(2.3) の行列をよくみると, $\mathrm{Ad}(h_\theta)$ は $e_3 = {}^t(0,0,1)$ を軸とする θ だけの回転を表し, $\mathrm{Ad}(k_\varphi)$ は $e_2 = {}^t(0,1,0)$ を軸とする φ だけの回転を表していることが分かる[*6]．このことから, $h_\theta,\ k_\varphi$ は $SO(3)$ の元であることが分

[*5] 何故このような行列を考えるのかは後で分かる．

[*6] $\mathrm{Ad}(k_\varphi)$ は $e_2 = {}^t(0,1,0)$ を軸とする $-\varphi$ だけの回転ではないことに注意する．(e_3, e_1, e_2) が右手系をなしている．

かる．ここで, 次の事実を思い出そう: $SO(3)$ の任意の元は, 適当に $\theta,\ \varphi,\ \psi \in \mathbb{R}$ をとれば, $Z_\theta Y_\varphi Z_\psi$ と表される．ただし, Z_θ は e_3 を軸とする θ だけの回転, Y_φ は e_2 を軸とする φ だけの回転である．このとき (θ,φ,ψ) を, その回転の Eular (オイラー) 角というのであった．

<u>$\mathrm{Ad}(SU(2)) \supset SO(3)$ であること</u>: 上の事実より, $g' \in SO(3)$ をとれば, ある $\theta,\ \varphi,\ \psi \in \mathbb{R}$ が存在して, $g' = \mathrm{Ad}(h_\theta)\mathrm{Ad}(k_\varphi)\mathrm{Ad}(h_\psi)$ と書ける．Ad は準同型であったから, $g' = \mathrm{Ad}(h_\theta k_\varphi h_\psi)$ となる．$h_\theta k_\varphi h_\psi \in SU(2)$ より, $g' \in \mathrm{Ad}(SU(2))$ である．ゆえに $\mathrm{Ad}(SU(2)) \supset SO(3)$ となる．

<u>$\mathrm{Ad}(SU(2)) \subset SO(3)$ であること</u>: これを示すには, $SU(2)$ の任意の元は, 適当に $\theta,\ \varphi,\ \psi \in \mathbb{R}$ をとれば, $h_\theta k_\varphi h_\psi$ と表されることをいえば良い[*7]．任意の $g \in SU(2)$ は,

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \quad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{C})$$

と書くことができる．そこで, $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$ $(a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R})$ とおけば, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ であるから, ある $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\sqrt{a^2 + c^2} = \cos\frac{\theta}{2},\ \sqrt{b^2 + d^2} = \sin\frac{\theta}{2}.$$

となる．さらに

$$a = \cos\frac{\theta}{2}\cos\tau_1,\ c = \cos\frac{\theta}{2}\sin\tau_1,\ b = \sin\frac{\theta}{2}\cos\tau_2,\ d = \sin\frac{\theta}{2}\sin\tau_2.$$

となる $\tau_1,\ \tau_2 \in \mathbb{R}$ をとり, $\varphi = \tau_1 + \tau_2$, $\psi = \tau_1 - \tau_2$ とおけば,

$$g = h_\varphi k_\theta h_\psi$$

と書けることが計算で確かめられる．よって, $\mathrm{Ad}(h_\varphi k_\theta h_\psi) = \mathrm{Ad}(h_\varphi)\mathrm{Ad}(k_\theta)\mathrm{Ad}(h_\psi) \in SO(3)$ であるから, $\mathrm{Ad}(SU(2)) \subset SO(3)$ となる．

従って, $\mathrm{Ad}(SU(2)) = SO(3)$ となることが示された．

<u>準同型 Ad が 2 対 1 の写像であること</u>: $\mathrm{Ad}(g) = I$ となる $g \in SU(2)$ を求めることで分かる．$\mathrm{Ad}(g) = I$ ならば $\mathrm{Ad}(g)e_3 = e_3$ であるから, $ge_3 = e_3 g$ が成り立ち

$$\begin{bmatrix} i\alpha & -i\beta \\ -i\overline{\beta} & -i\overline{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\alpha & i\beta \\ i\overline{\beta} & -i\overline{\alpha} \end{bmatrix}.$$

ゆえに $\beta = 0$, つまり $g = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$ の形でなければならない．さらに $ge_2 = e_2 g$ より

$$\begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

であるから, $\alpha^{-1} = \alpha$, すなわち $\alpha^2 = 1$．ゆえに $a = \pm 1$ でなければならない．従って, $g = \pm I$ となる．逆に $\mathrm{Ad}(\pm I) = I$ は明らかである．これは $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad} = \{\pm I\}$ を意味する．次に $g,\ h \in SU(2)$ に対して, $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}(h)$ とすれば, $\mathrm{Ad}(gh^{-1}) = \mathrm{Ad}(g)\mathrm{Ad}(h)^{-1} = I$ であるから $gh^{-1} = \pm I$, すなわち $g = \pm h$ となる．従って準同型 Ad は 2 対 1 の写像である．

以上で定理が証明された． □

[*7] (2.2) のように, $SU(2)$ の元として $h_\theta,\ k_\varphi$ をとったのは, $\mathrm{Ad}(h_\theta),\ \mathrm{Ad}(k_\varphi)$ の合成によって $SO(3)$ の元を表すことができ, また $h_\theta,\ k_\varphi$ の合成によって $SU(2)$ の元を表すことができるという理由による．

定理 2.1 により, $SU(2)$ の表現と $SO(3)$ の表現は随伴表現を通じて関係しているのであるが, この話題は, また別の機会にということにしたい.

References

[1] 熊原啓作, “行列・群・等質空間,” 日評数学選書, 日本評論社, 2001.
[2] 杉浦光夫・山内恭彦, “連続群論入門,” 新数学シリーズ **18**, 培風館, 1960.