Fibonacci 数列と黄金比

T. Nakagawa

April 6, 2007

1　隣接 3 項間の漸化式

Fibonacci (フィボナッチ) 数列は隣接 3 項間の漸化式で表されるため, 先ず漸化式の解法について解説する. 隣接 3 項間の漸化式は数列 $\{a_n\}$ に対し, 次のように表される.

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0, \tag{1.1}$$

ここで $n \in \mathbb{N}$, p, q は任意定数である.

(1.1) を満たす数列として等比数列が考えられるから, $a_n = ar^{n-1}$ を (1.1) に代入すると,

$$\begin{aligned} ar^{n+1} + par^n + qar^{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow r^2 + pr + q &= 0 \\ \therefore r &= \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

この 2 つ解を α, β $(\alpha \neq \beta)$ とすると[*1],

$$\begin{aligned} r^2 + pr + q &= (r - \alpha)(r - \beta) \\ \therefore p &= -(\alpha + \beta),\ q = \alpha\beta \end{aligned}$$

であるから, (1.1) に代入すると,

$$\begin{aligned} a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n &= 0 \\ \Leftrightarrow a_{n+2} - \alpha a_{n+1} - \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) &= 0 \\ \therefore a_{n+2} - \alpha a_{n+1} &= \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \end{aligned} \tag{1.3}$$

となり, $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は初項 $a_2 - \alpha a_1$, 公比 β の等比数列である. 従って, (1.3) は

$$(a_{n+1} - \alpha a_n) = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1). \tag{1.4}$$

また α と β を入れ替えて,

$$(a_{n+1} - \beta a_n) = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1). \tag{1.5}$$

[*1] $\alpha = \beta$ の時は読者に委ねる.

(1.4) − (1.5) より,

$$
\begin{aligned}
(\beta-\alpha)a_n &= \left\{\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)-\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)\right\} \\
\therefore a_n &= \frac{1}{\beta-\alpha}\left\{\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)-\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)\right\} \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

となり, 一般項 a_n を求めることができる.

2 Fibonacci 数列

Fibonacci 数列は次のような兎の問題から導かれた.

問題 今, ここに 1 つがいの子兎がいる. 子兎は 1 ヶ月経つと親兎になり, 1 つがいの親兎は 1 ヶ月経つと 1 つがいの子兎を産む. その後, 1 ヶ月経つごとに親兎は 1 つがいの子兎を産んで行く. 産まれた子兎達も同じように 1 ヶ月経つと親兎になり, また 1 ヶ月経つと子兎を産む. n ヶ月後には何つがいの兎がいるか. 尚, 兎は全て死亡しないとする.

注意 兎の問題と次に示す数列では n ヶ月後 と a_{n+1} が対応している.

先ず, $a_n = n-1$ ヶ月後の兎の総数 とすると[*2], n ヵ月後からは

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + \text{新たに産まれた子兎}, \\
a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n(\text{ 新たに産まれた子兎 })
\end{aligned}
$$

となる. 従って, Fibonacci 数列は

$$
a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad (2.1)
$$

と表される.

(1.1) と比べると $p=-1$, $q=-1$ の場合である. $\alpha = \left(1-\sqrt{5}\right)/2$, $\beta = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ と置き, また $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ であるから (1.6) より一般項 a_n は

$$
a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \qquad (2.2)
$$

となる[*3].

3 Fibonacci 数列と黄金比の関係

(2.2) において, 隣接項の比を考えると,

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta^n-\alpha^n} \\
&= \frac{1-(\alpha/\beta)^{n+1}}{1/\beta\{1-(\alpha/\beta)^n\}}.
\end{aligned}
$$

[*2] この時の兎は親兎と子兎がいて, 1 ヶ月経つと全て親兎になる.
[*3] 線型代数の知識があるなら (2.1) を行列で表し, 対角化により一般項を求めることもできる.

ここで $n \to \infty$ とすると,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{3.1}$$

となり, Fibonacci 数列の隣接項の比は黄金比 β に収束することが分かる[*4].

黄金比は長方形の縦と横の長さを均整のとれた比に分割するものであるが, Fibonacci 数列や黄金比は自然界にも多く現れており, 興味深いものである.

References

[1] 岡田章三,「ダヴィンチコード」に登場する数学, 2006.

[*4] 話の流れから, ここでは黄金比を β で表しているが, 一般に ϕ と表すようである.