分離公理

T. Nakagawa

August 9, 2007

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ には空間 X に密着位相を入れて得られる密着空間 $(X, \{\emptyset, X\})$ のように, 各点 x の近傍が X となる扱いにくいものがある. それは開集合が非常に少ない空間だからであり, これに対し距離空間 (X, d) は開集合が豊富に存在するため扱いやすい. このように, ある集合 X に強い位相を与えると距離空間に近い性質が得られ, 点列の極限の一意性が保証される. そこで, 開集合がどの程度存在するか, すなわち距離空間と一般の位相空間との差を示す分離公理と呼ばれる幾つかの公理がある. 分離公理の中でも, Hausdorff の分離公理と第 4 分離公理は特に重要である. また, ある条件により, 一般の位相空間が距離空間になる Urysohn の距離化定理を紹介する.

1 分離公理

以下, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を略して単に位相空間 X と書く.

1.1 T_0 空間

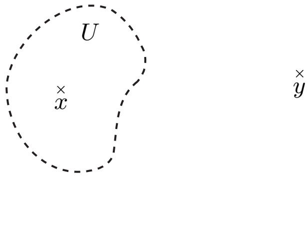
定義 1.1 位相空間 X が次の条件 (T_0) を満たすとき, X を T_0 **空間**という.

(T_0) 任意の異なる 2 点 $x,\ y \in X$ に対し, $x \in U$ かつ $y \notin U$ となる開集合 U が存在する. あるいは $y \in V$ かつ $x \notin V$ となる開集合 V が存在する.

1.2 T_1 空間

定義 1.2 位相空間 X に対する次の条件 (T_1) を**第 1 分離公理**あるいは **Fréchet** (フレシェ) **の公理**といい, X がその条件を満たすとき, X を T_1 **空間**という.

(T_1) 任意の異なる 2 点 $x,\ y \in X$ に対し, $x \in U$ かつ $y \notin U$ となる開集合 U が存在する.



命題 1.1 (1) X が T_1 空間 $\Leftrightarrow$ 任意の点 $x \in X$ に対し,

$$\bigcap \{U ; U \text{ は } x \text{ の開近傍 }\} = \{x\}.$$

(2) X が T_1 空間 $\Leftrightarrow$ 任意の点 $x \in X$ よりなる集合 $\{x\}$ は閉集合である.

証明 (1) 先ず X を T_1 空間とする. $x \in X$ と異なる任意の点 y に対し, $x \in U$, $y \notin U$ となる開集合 U が存在する. y は任意だから x の全ての開近傍 U の共通部分は $\{x\}$ となる. 逆に, 任意の点 x に対し, x の全ての開近傍 U の共通部分は $\{x\}$ とする. このとき $y \notin U$ となる開集合 U が存在する. これは明らかに T_1 空間である.

(2) 先ず X を T_1 空間とする. 任意の異なる 2 点 $x,\ y \in X$ に対し, 仮定から $y \in V$, $x \notin V$ となる開集合 V が存在する. y は任意だから, よって $\{x\}$ は閉集合となる. 逆に, 任意の点 $x \in X$ に対し, $\{x\}$ が閉集合とする. $x,\ y \in X$ を異なる 2 点とすれば, $V = X \backslash \{x\}$ は $y \in V$, $x \notin V$ となる開集合である. よって X は T_1 空間である. □

命題 1.2 T_1 空間の部分空間及び直積空間は T_1 空間である.

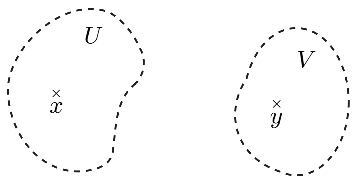
証明 X を T_1 空間, Y をその部分空間とする. 任意の異なる 2 点 $x,\ y \in Y$ に対し, $x \in U$, $y \notin U$ となる開集合 $U \subset X$ 及び $y \in V$, $x \notin V$ となる開集合 $V \subset X$ が存在する. よって, $x \in U \cap Y$, $y \notin U \cap Y$ となる開集合 $U \cap Y \subset Y$ 及び $y \in V \cap Y$, $x \notin V \cap Y$ となる開集合 $V \cap Y \subset Y$ が存在するから, Y は T_1 空間である.

次に, 添え字の集合を Λ とし, 各 X_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を T_1 空間, $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ をその直積空間, $p_\lambda : X \to X_\lambda$ を λ 成分への射影とする. 任意の異なる 2 点 $x,\ y \in X$ に対し, ある $\lambda_0 \in \Lambda$ について, $p_\lambda(x) \neq p_\lambda(y)$ ならば $p_\lambda(x) \in U_{\lambda_0}$, $p_\lambda(y) \notin U_{\lambda_0}$ となる開集合 $U_{\lambda_0} \subset X_{\lambda_0}$ 及び $p_\lambda(y) \in V_{\lambda_0}$, $p_\lambda(x) \notin V_{\lambda_0}$ となる開集合 $V_{\lambda_0} \subset X_{\lambda_0}$ が存在する. p_{λ_0} は連続だから, よって, $x \in p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0})$, $y \notin p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0})$ 及び $y \in p_{\lambda_0}^{-1}(V_{\lambda_0})$, $x \notin p_{\lambda_0}^{-1}(V_{\lambda_0})$ となる開集合 $p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0})$, $p_{\lambda_0}^{-1}(V_{\lambda_0})$ が存在し, X は T_1 空間である. □

1.3 Hausdorff 空間

定義 1.3 位相空間 X に対する次の条件 (T_2) を**第 2 分離公理**あるいは **Hausdorff** (ハウスドルフ) **の分離公理**といい, X がその条件を満たすとき, X を **Hausdorff 空間**という[*1].

(T_2) 任意の異なる 2 点 $x,\ y \in X$ に対し, $x \in U$, $y \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V が存在する.



定義から明らかに, Hausdorff 空間 $\Rightarrow$ T_1空間 $\Rightarrow$ T_0空間 となる.

[*1] T_2 空間ともいうが, Hausdorff 空間の方が一般的である.

命題 1.3 (1) X が Hausdorff 空間 $\Leftrightarrow$ 任意の点 $x \in X$ に対し,

$$\bigcap\{F; F \text{ は } x \text{ の閉近傍 }\} = \{x\}.$$

(2) X が Hausdorff 空間 $\Leftrightarrow$ $X \times X$ の対角線集合 $\Delta = \{(x,x); x \in X\}$ は閉集合である.

証明 (1) 先ず X を Hausdorff 空間とする. 任意の異なる 2 点 x, $y \in X$ に対し, 仮定から $x \in U$, $y \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V が存在する. このとき, $X \backslash V$ は $x \in U \subset X \backslash V$, $y \notin X \backslash V$ となる閉集合であり, さらに y は任意だから x の全ての閉近傍 F の共通部分は $\{x\}$ となる. 逆に, 任意の点 x に対し, x の全ての閉近傍 F の共通部分は $\{x\}$ とする. x, $y \in X$ を異なる 2 点とすれば, $y \notin F$ となる x の閉近傍 F が存在する. このとき $x \in U \subset F$ となる開集合 U をとり, $y \in V$ となる開集合を $V = X \backslash F$ とおけば, $U \cap V = \emptyset$ となる. よって X は Hausdorff 空間である.

(2) 先ず X を Hausdorff 空間とする. 任意の $(x,y) \in X \times X \backslash \Delta$ に対し, 仮定から $x \in U$, $y \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V が存在する. よって, $(x,y) \in U \times V \subset X \times X$, $U \times V \cap \Delta = \emptyset$ であるから Δ は閉集合となる. 逆に Δ は閉集合, すなわち Δ^c は開集合とする. このとき任意の $(x,y) \in X \times X \backslash \Delta$ に対し, $(x,y) \in U \times V \subset X \times X \backslash \Delta$, $U \times V \cap \Delta = \emptyset$ となる開集合 U, V が存在する. よって $U \cap V = \emptyset$ より X は Hausdorff 空間である. □

命題 1.4 Hausdorff 空間 X において, 任意の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ は唯一の極限点をもつ.

証明 任意の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が異なる 2 点 x, y に収束すると仮定する. X は Hausdorff 空間であるから, $x \in U$, $y \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V が存在する. このとき, ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq m$ ならば $x_n \in U$, $x_n \in V$ となるが, これは $U \cap V = \emptyset$ に矛盾する. □

命題 1.5 Hausdorff 空間の部分空間及び直積空間は Hausdorff 空間である.

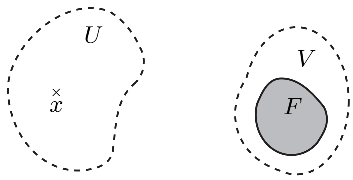
証明 X を Hausdorff 空間とする. Y をその部分空間とする. 任意の異なる 2 点 x, $y \in Y$ に対し, $x \in U$, $y \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V が存在する. よって, $x \in U \cap Y$, $y \in V \cap Y$ かつ $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$ となる開集合 $U \cap Y$, $V \cap Y$ が存在するから, Y は Hausdorff 空間である.

次に, 添え字の集合を Λ とし, 各 X_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を Hausdorff 空間, $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積空間, $p_\lambda : X \to X_\lambda$ を λ 成分への射影とする. 任意の異なる 2 点 x, $y \in X$ に対し, ある $\lambda_0 \in \Lambda$ について, $p_{\lambda_0}(x) \neq p_{\lambda_0}(y)$ ならば $p_{\lambda_0}(x) \in U_{\lambda_0} \subset X_{\lambda_0}$, $p_{\lambda_0}(y) \in V_{\lambda_0} \subset X_{\lambda_0}$ かつ $U_{\lambda_0} \cap V_{\lambda_0} = \emptyset$ となる開集合 U_{λ_0}, V_{λ_0} が存在する. p_{λ_0} は連続だから, よって, $x \in p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0})$, $y \in p_{\lambda_0}^{-1}(V_{\lambda_0})$ かつ $p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0}) \cap p_{\lambda_0}^{-1}(V_{\lambda_0}) = \emptyset$ となる開集合 $p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0})$, $p_{\lambda_0}^{-1}(V_{\lambda_0})$ が存在し, X は Hausdorff 空間である. □

1.4 T_3 空間と正則空間

定義 1.4 位相空間 X に対する次の条件 (T_3) を**第 3 分離公理**あるいは **Vietoris** (ヴィエトリス) **の公理**といい, X がその条件を満たすとき, X を T_3 **空間**という. さらに X が T_1 空間であるとき, X を**正則空間** (normal space) という.

(T_3) 任意の点 $x \in X$ と $x \notin F$ を満たす閉集合 $F \subset X$ に対し, $x \in U$, $F \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V が存在する.



命題 1.6 X が T_3 空間 $\Leftrightarrow$ 任意の点 $x \in X$ と開集合 $U \ni x$ に対し, $x \in V \subset \bar{V} \subset U$ となる開集合 V が存在する.

証明 先ず X を T_3 空間とする. 任意の点 x と開集合 $U \ni x$ に対し, $X \backslash U$ は $x \notin X \backslash U$ となる閉集合である. 仮定から $x \in V$, $X \backslash U \subset W$ かつ $U \cap V = \varnothing$ となる開集合 V, W が存在する. よって, $x \in V \subset X \backslash W \subset U$, $\bar{V} \subset X \backslash W$ より, $x \in V \subset \bar{V} \subset U$ となる. 逆を示す. 任意の点 x に対し, $x \notin F$ となる閉集合 F をとる. $X \backslash F$ は $x \in X \backslash F$ となる開集合であるから, このとき $x \in U \subset \bar{U} \subset X \backslash F$ となる開集合 U が存在する. そこで, 開集合 V を $V = X \backslash \bar{U}$ とおけば $F \subset U$ かつ $U \cap V = \varnothing$ となり, よって X は T_3 空間である. □

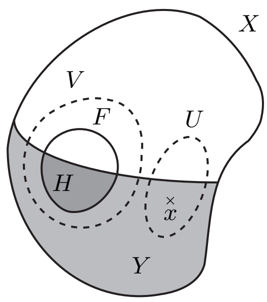
ここで, 命題 1.7 を証明するために次の補題を用意するが, その証明は省略する.

補題 1.1 添え字の集合を Λ とし, 各 X_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を位相空間, $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を集合族 $\{X_\lambda\}_\lambda$ の直積空間, $p_\lambda : X \to X_\lambda$ を λ 成分への射影とする. $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ に対して, $A_{\lambda_i} \subset X_{\lambda_i}$ のとき次式が成り立つ：

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(A_{\lambda_i})} = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(\bar{A}_{\lambda_i}).$$

命題 1.7 正則空間の部分空間及び直積空間は正則である.

証明 X を正則空間, Y をその部分空間とする. 任意の点 $x \in Y$ と $x \notin H$ となる閉集合 $H \subset Y$ に対し, $H = F \cap Y$ となる閉集合 $F \subset X$ が存在する. X は正則空間であるから, $x \notin F$ に対し, $x \in U$, $F \subset V$ かつ $U \cap V = \varnothing$ となる開集合 U, $V \subset X$ が存在する. よって, $x \in U \cap Y$, $H \subset V \cap Y$ かつ $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \varnothing$ となる開集合 $U \cap Y$, $V \cap Y$ が存在するから, Y は T_3 空間である. さらに命題 1.2 より, Y は正則空間である.

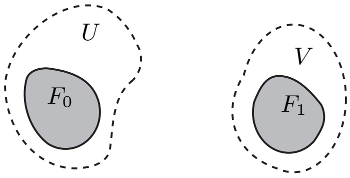


次に, 任意の点 $x \in X$ と開集合 $U \ni x$ に対し, ある部分集合 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ について, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) \subset W$ (U_{λ_i} は $X_{\lambda i}$ の開集合) となる. このとき各 i について, X_{λ_i} は正則空間だから命題 1.6 より $p_{\lambda_i}(x) \in V_{\lambda_i} \subset \bar{V}_{\lambda_i} \subset U_{\lambda_i}$ となる開集合 $V_{\lambda_i} \subset X_{\lambda i}$ が存在する. よって, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i}) \subset \overline{\bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i})} = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(\bar{V}_{\lambda_i}) \subset U$ となる開集合 $\bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i})$ が存在するから, X は T_3 空間である. さらに命題 1.2 より, X は正則空間である. □

1.5 T_4 空間と正規空間

定義 1.5 位相空間 X に対する次の条件 (T_4) を**第 4 分離公理**あるいは **Tietze** (ティーツェ) **の公理**といい, X がその条件を満たすとき, X を T_4 **空間**という. さらに X が T_1 空間であるとき, X を**正規空間** (regular space) という.

(T_4) 任意の互いに交わらない 2 つの閉集合 $F_0,\ F_1 \subset X$ に対し, $F_0 \subset U$, $F_1 \subset V$ かつ $U \cap V = \varnothing$ となる開集合 U, V が存在する.



定義から明らかに, 正規空間 $\Rightarrow$ 正則空間 $\Rightarrow$ Hausdorff 空間 となる.

命題 1.8 X が T_4 空間 $\Leftrightarrow$ 任意の閉集合 F と $U \supset F$ に対し, $F \subset V \subset \bar{V} \subset U$ となる開集合 V が存在する.

証明 命題 1.6 の証明と同様にすれば良い. □

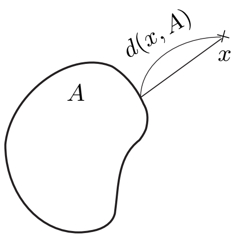
注意 1.1 条件 (T_3), (T_4) は条件 (T_2) よりも常に強いわけではない. なぜなら, 一般の位相空間においては 1 点からなる集合が閉集合となるとは限らないからである. また, 正規空間の部分空間及び直積空間は必ずしも正規空間にならない.

2 分離公理と連続函数

この節では, ある位相空間上に実数値連続函数が存在することが, その位相空間が満たす分離公理と関係することを見てみよう.

2.1 距離空間における分離公理

先ず, 距離空間に関する次の補題を証明する.



補題 2.1 (1) 距離空間 X の空でない部分集合 A と各点 $x \in X$ に対し,

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

と定義すれば, X 上の実数値連続函数 $X \ni x \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}$ が得られる.

(2) $d(x,A)=0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

証明 (1) 先ず, 点 $x,\ y \in X,\ a \in A$ に対し, 三角不等式 $d(x,a) \leq d(x,y)+d(y,a)$ が成り立つ. この左辺において, a に関する下限をとれば $d(x,A) \leq d(x,y)+d(y,a)$. 左辺は a に依らなくなったから, 次に右辺の a に関する下限をとれば $d(x,A) \leq d(x,y)+d(y,A)$. よって, $d(x,A)-d(y,A) \leq d(x,y)$. 同様にして $d(y,A)-d(x,A) \leq d(x,y)$ となり, ゆえに $|d(x,A)-d(y,A)| \leq d(x,y)$ が成り立つ. したがって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow |d(x,A)-d(y,A)| < \varepsilon$$

となるから, $d(x,A)$ は連続である.

(2) 明らか. □

これで補題 2.1 を使うと, 距離空間における 2 つの互いに素な閉集合が連続函数により分離されることが次の定理でわかる.

定理 2.1 距離空間は正規空間である.

証明 互いに素な閉集合 $F_0,\ F_1 \subset X$ と点 $x \in X$ に対して, $d(x,F_0)+d(x,F_1) > 0$ となる. そこで, 函数 $f : X \to \mathbb{R}$ を

$$X \ni x \mapsto f(x) = \frac{d(x,F_0)}{d(x,F_0)+d(x,F_1)}$$

と定義すれば, 補題 2.1 より f は連続であり, $0 \leq f(x) \leq 1$ かつ $F_0 = \{x; f(x)=0\}$, $F_1 = \{x; f(x)=1\}$ となる. このとき $U = f^{-1}([0,1/2))$, $V = f^{-1}((1/2,1])$ とおけば, これらは $U \supset F_0$, $V \supset F_1$ かつ $U \cap V = \varnothing$ となる開集合である. よって距離空間は正規空間である. □

この証明の中で, 次の定理が成り立つことがわかる.

定理 2.2 X を距離空間, $F_0,\ F_1 \subset X$ を互いに素な閉集合とする. このとき実数値連続函数 $f : X \to [0,1]$ で, $f(x)=0\ (x \in F_0)$, $f(x)=1\ (x \in F_1)$ を満たすものが存在する.

2.2 正規空間と連続函数

距離空間において定理 2.2 が成り立つことを見た. 正規空間においても同じような定理が成り立つ. それは次の **Urysohn** (ウリゾーン) **の補題** (Urysohn's lemma) と呼ばれるものである[*2].

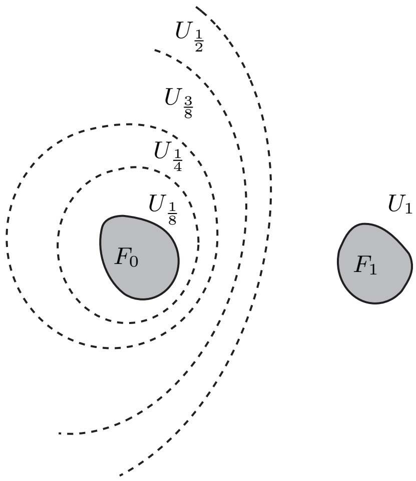
定理 2.3 (Urysohn の補題) X を正規空間, $F_0,\ F_1 \subset X$ を互いに素な閉集合とする. このとき実数値連続函数 $f : X \to [0,1]$ で, $f(x)=0\ (x \in F_0)$, $f(x)=1\ (x \in F_1)$ を満たすものが存在する.

証明 証明の方針は条件 (T_4) を繰り返し使い, 空間 X 上に等高線を稠密に引くことにより, 任意の点 x に対し, その高さとして函数 $f(x)$ を定義するというものである. 先ず, 開集合 U_1 を $U_1 = X \backslash F_1$ とおけば, $F_0 \subset U_1$ だから命題 1.8 より, $F_0 \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_1$ となる開集合 $U_{\frac{1}{2}}$ が存在する. これと同じことを $F_0 \subset U_{\frac{1}{2}}$, $\overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_1$ に対して適用すれば,

$$F_0 \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{3}{4}} \subset U_1$$

[*2] 補題であるのに定理というのは少し変な気もするが, それが一般的なので諦めよう.

となる開集合 $U_{\frac{1}{4}}$, $U_{\frac{3}{4}}$ が存在する．以下, この操作を繰り返し使うことは n に関する帰納法により, 有理数 $r = k/2^n$ $(n \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq 2^n - 1)$ に対し開集合 U_r をとり, $r < r'$ ならば $U_r \subset \bar{U}_r \subset U_{r'}$ という性質を満たすようにすることである．ここで, r は $[0,1]$ において稠密である．



次に, 函数 $f : X \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$X \ni x \mapsto f(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \notin U_1 \\ \inf\{r; x \in U_r\} & \text{if } x \in U_1. \end{cases}$$

このとき f は明らかに定理の条件を満たすから, あとは f の連続性を示せば良い．そのために $f^{-1}([0,a))$, $f^{-1}((a,1])$ を調べる．ある $r' < a$ に対し, $x \in U_{r'}$ ならば $f(x) \leq r' < a$ だから, $x \in f^{-1}([0,a))$．逆に, $x \in f^{-1}([0,a))$ ならば $f(x) < a$ だから, ある $r' < a$ が存在して, $x \in U_{r'} \subset \bigcup_{r<a} U_r$．ゆえに $f^{-1}([0,a)) = \bigcup_{r<a} U_r$ より, $f^{-1}([0,a))$ は開集合である．同様に, ある $r' > a$ に対し, $x \in X \backslash \bar{U}_{r'}$ ならば $x \notin \bar{U}_{r'}$ より $x \notin U_{r'}$．よって, $f(x) \geq r' > a$ だから $x \in f^{-1}([a,1))$．逆に, $x \in f^{-1}([a,1))$ ならば $f(x) > a$ だから, ある $r' > a$ が存在して, $x \notin U_{r'}$．また r は $[0,1]$ において稠密であるから, $r' > a$ ならば $r' > r'' > a$ となる r'' が存在する．$x \notin U_{r'}$ より $x \notin \bar{U}_{r''} \subset U_{r'}$ がいえる．すなわち, $x \in X \backslash \bar{U}_{r''} \subset \bigcup_{r>a} X \backslash \bar{U}_r$ である．よって, $f^{-1}([a,1)) = \bigcup_{r>a} X \backslash \bar{U}_r$ より, $f^{-1}([a,1))$ は開集合である．したがって, f は連続である． □

ここで, 正則空間においても上記と同じような定理, すなわち 1 点とその点を含まない閉集合が連続函数により分離されることを期待するが, 一般には成り立たないことが知られている．そこで, 次に示す完全正則空間がある．

2.3 完全正則空間

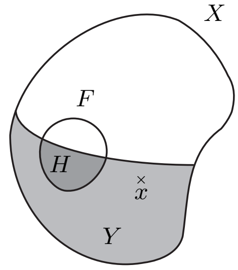
定義 2.1 位相空間 X に対する次の条件 $\left(T_{3\frac{1}{2}}\right)$ を $T_{3\frac{1}{2}}$ あるいは **Tychonoff** (チコノフ) **の分離公理**という．さらに X が T_1 空間であるとき, X を**完全正則空間** (completely normal space) という．

$\left(T_{3\frac{1}{2}}\right)$ 任意の点 $x \in X$ と $x \notin F$ を満たす閉集合 $F \subset X$ に対し, それらを分離する実数値連続函数 $f : X \to [0,1]$ で, $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ $(y \in F)$ を満たすものが存在する．

定義から明らかに, 正規空間 ⇒ 完全正則空間 ⇒ 正則空間 となる．

命題 2.1 完全正則空間の部分空間及び直積空間は完全正則空間である.

証明 X を完全正則空間, Y をその部分空間とする. 任意の点 $x \in Y$ と $x \notin H$ となる閉集合 $H \subset Y$ に対し, $H = F \cap Y$ となる閉集合 $F \subset X$ が存在する. このとき $x \notin F$ であるから, $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ $(y \in F)$ を満たす連続函数 $f : X \to [0,1]$ が存在する. よって, f を Y に制限した写像 $f|_Y : Y \to [0,1]$ に対し, $f|_Y(x) = 0$, $f|_Y(y) = 1$ $(y \in H)$ を満たすから Y は完全正則空間である.



次に, 任意の点 $x \in X$ と開集合 $U \ni x$ に対し, ある部分集合 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ について, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) \subset U$ (U_{λ_i} は X_{λ_i} の開集合) となる. このとき各 i について, X_{λ_i} は完全正則空間だから, $(f_{\lambda i} \circ p_{\lambda i})(x) = 0$, $f_{\lambda i}(X_{\lambda i} \backslash U_{\lambda i}) = 1$ となる連続函数 $f_{\lambda i} : X_{\lambda i} \to [0,1]$ が存在する. ここで, 連続函数 $f : X \to [0,1]$ を $f(y) = \max_{1 \leq i \leq n}\{f_{\lambda i} \circ p_{\lambda i}(y)\}$ $(y \in X)$ と定義すれば[*3], $f(x) = 0$, $f(X \backslash U) = 1$ となる. よって X は T_3 空間である. さらに命題 1.2 より, X は完全正則空間である. □

以上から, 分離公理に関して次の関係が成り立つ:

距離空間 ⇒ 正規空間 ⇒ 完全正則空間 ⇒ 正則空間 ⇒ Hausdorff 空間 ⇒ T_1空間 ⇒ T_0空間.

3 距離化定理

距離空間には正規性など良い性質があるため, 与えられた位相空間が距離空間になることは都合が良い. そこで, 位相空間が与えられたとき, それがどのような条件を満たせば距離空間と同相になるかという問いが重要である. その答えとして, 最後に **Urysohn の距離化定理** (Urysohn's metrization theorem) を紹介しよう.

定理 3.1 (Urysohn の距離化定理) 正規かつ第 2 可算公理を満たす位相空間 X は距離化可能である.

すなわち, 位相空間 X の位相を与える距離函数 d を定義することができる.

References

[1] 松坂和夫『集合・位相入門』岩波書店, 1968.
[2] 三村護, 吉岡巖『位相数学入門』培風館, 1995.
[3] 森田茂之『集合と位相空間』講座 数学の考え方 8, 朝倉書店, 2002.
[4] 矢野公一『距離空間と位相構造』共立講座 21 世紀の数学, 共立出版, 1997.

[*3] $y \in X \backslash U$ ならば, ある i に対し $p_{\lambda i}(y) \in U_{\lambda i}$ より, $f_{\lambda i} \circ p_{\lambda i}(y) = 0$ となるから.