# Helmholtz の法則

T. Nakagawa

July 15, 2009

**問題**:「Helmholtz の法則」を説明しなさい.

## 1 Helmholtz の第 3 法則

ある決まった時刻について 1 本の渦管を考える. “この渦管の側面上を 1 周する 1 つの閉曲線 $C$ に沿う循環を考えると, 循環の値は $C$ のとり方によらず, 渦管に固有の不変量である”. これを **Helmholtz の第 3 法則**という. このことは次のように証明される.

$C$ とは別に, $C$ に交わらずに渦管を 1 周するもう 1 つの閉曲線を $C'$ とする. $C$, $C'$ 上にそれぞれ点 $A$, $A'$ をとり, 線分 $ACA$, $AA'$, $A'C'A'$, $A'A$ によって作られる閉曲線を $C''$ とし, $C''$ に沿う循環を考える. $C''$ で囲まれた渦管の側面 $S''$ 上では $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{\omega}$ ($\boldsymbol{n}$ は渦管の側面の任意点における法線ベクトル, $\boldsymbol{\omega}$ は渦度) が成り立つことを考慮して,

$$\Gamma\left(C''\right) = \int_{C''} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{S''} \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{S} = 0.$$

ここで, $\boldsymbol{v}$ は流速ベクトル, $d\boldsymbol{s}$ は線要素である. 一方, 閉曲線 $C''$ に沿う線積分を分解すると, 線分 $AA'$, $A'A$ に沿う積分は互いに打ち消すから,

$$0 = \left(\int_{C} + \int_{A}^{A'} - \int_{C'} + \int_{A'}^{A}\right) \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{C} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} - \int_{C'} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = \Gamma\left(C\right) - \Gamma\left(C'\right)$$

となり, よって $\Gamma(C) = \Gamma(C')$ を得る. すなわち, 渦管を 1 周する任意の閉曲線 $C$ に沿う循環 $\Gamma(C)$ は, $C$ のとり方には無関係に,

$$\Gamma\left(C\right) = \text{const.}\ (\text{渦管を通じて})$$

となり, 循環は渦管に固有の不変量である. この循環を渦管の強さともいう.

渦糸 (無限小の断面積をもつ極めて細い渦管) の強さ $\Gamma$ は, 渦糸の垂直断面積を $\sigma$ とすれば, 渦度 $\omega$ は断面内では一定とみなして良いから, 循環の定義より

$$\Gamma = \omega\sigma = \text{const.}\ (\text{渦糸を通じて}) \quad (\omega = |\boldsymbol{\omega}|)$$

となる. 1 本の渦糸を通じて積 $\omega\sigma$ が一定であることから, 細いところほど渦度 $\omega$ が大きく, したがって流体粒子の自転の角速度が大きいことがわかる.

## 2　Helmholtz の第 2 法則

先ず, 次の Kelvin の循環定理が知られている: “粘性のない一様密度の流体が保存力のもとで連続的に運動する場合, 流体粒子によって作られる任意の閉曲線に沿う循環は時間的に不変である”. Helmholtz の第 3 法則は, 循環が一時刻の 1 つの渦管について不変ということであるが, Kelvin の循環定理は, 循環が流体の運動を追随するとき時間的に不変であることを物語る.

さて, ある時刻 $t$ において 1 つの渦面 $S$ を考え, 面 $S$ 構成していた流体粒子は時間が経つと流れて, 時刻 $t' > t$ において 1 つの曲面 $S'$ を形成したとする. このとき, $S'$ もまた 1 つの渦面であることが次のように証明される.

渦面 $S$ 上に任意の閉曲線 $C$ をとる. $S(C)$ を $C$ で囲まれた渦面 $S$ の部分とすれば, $S(C)$ 上では $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{\omega}$ ($\boldsymbol{n}$ は渦面の法線ベクトル) が成り立つことを考慮して, $C$ に沿う循環 $\Gamma(C)$ は,

$$\Gamma(C) = \int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{S(C)} \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{S} = 0.$$

閉曲線 $C$ が後の時刻 $t'$ において面 $S'$ 上の閉曲線 $C'$ になったとすれば, $C'$ に沿う循環 $\Gamma(C')$ は Kelvin の循環定理によって,

$$\Gamma\left(C'\right) = \int_{S(C')} \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{S} = \Gamma(C) = 0.$$

閉曲線 $C'$ はもとの閉曲線 $C$ を適当に選ぶことによって面 $S'$ 上で任意にとれるから, 結局, 面 $S'$ 上のいたるところで $\boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$, すなわち, 面 $S'$ は渦面でなければならない.

さて, 2 つの渦面の交線は渦線である. 渦面が渦面として行動するなら, その交線である渦線も当然渦線として行動する. すなわち, “渦線は流体粒子とともに運動する”. これを **Helmholtz の第 2 法則**という.

渦管については, 渦管の側面は渦面であるから, 1 つの渦管は常に 1 つの渦管として保たれることがわかる. 渦管の側面上を 1 周するような閉曲線 $C$ を考えると, 循環 $\Gamma(C)$ は Kelvin の定理によって,

$$\Gamma(C) = \text{const.}\ (\text{時間的に})$$

である. すなわち, 渦管の強さは時間的に一定不変である.

無限小の断面積をもつ極めて細い渦管, すなわち渦糸については, 上のことから, 1 本の渦糸は常に 1 本の渦糸として保たれ, 渦糸の強さ $\Gamma$ は

$$\Gamma = \omega\sigma = \text{const.}\ (\text{時間的に})$$

であることがわかる.

渦糸の微小部分をとり, その長さを $\delta s$ とすれば, その体積は $\sigma\delta s$, したがって質量は $\rho\sigma\delta s$ である. ただし, $\rho$ $(= \text{const.})$ は密度である. 質量保存の法則から, $\rho\sigma\delta s$ は時間的に一定不変に保たれる. よって, $\rho\sigma\delta s/\Gamma = \text{const.}$ から,

$$\frac{\rho}{\omega}\delta s = \text{const.}$$

を得る. $\rho = \text{const.}$ であるから, 渦糸の伸び縮みに比例して渦度が増減することがわかる.

渦運動をしている流体は, これを細分して渦糸の集合とみなすことができる. その渦糸の 1 本 1 本は, 時間の経過につれて変形し, 伸び縮みするが, 渦糸の強さ $\Gamma = \omega\sigma$ という一定不変の量を保持している. これは, 質点系の力学で, 各質点が質量という一定不変の量を保持することに対比される.

ところで, 第 2 法則は, 領域 $\mathcal{D}$ の自己微分同相写像 $\boldsymbol{\varphi}$ が与えられ, 同じ写像によって, $\mathcal{D}$ 内に埋め込まれた渦線が写像されることを述べる. ヤコビアン $J\ (=1)$ が正であるから, $\boldsymbol{\varphi}$ は方向も保つ. 渦線自身の上にも渦度の方向を正とする自然な向きが入り, $\boldsymbol{\varphi}$ はこの向きも保つ. これは結び目・絡み目の同型の定義と本質的に同じ内容である. 同型な結び目 (resp. 絡み目) は同じ結び目型 (resp. 絡み目型) に属するという. よって, 次の系を得る.

**系 2.1** 渦線の結び目型・絡み目型は時間的に不変である.

## 3 Helmholtz の第 1 法則

渦糸に対する Helmholtz の第 2 法則から, ある時刻において渦なし $(\boldsymbol{\omega} = 0)$ であった流体はその後の時刻においても常に渦なしである. すなわち, “粘性のない一様密度の流体が保存力のもとで連続的に運動する場合, 初期に渦度をもたない流体粒子は, 全ての時刻において, 渦度をもたない”. これを **Helmholtz の第 1 法則**という. 逆に, ある時刻において渦あり $(\boldsymbol{\omega} \neq 0)$ であった流体はその後も渦ありであることが結論される.

第 1 法則は, 第 2 法則や第 3 法則とは違って, 定性的な内容しか持っていないが, 粘性のない一様密度の流体の運動においては, 渦なし流と渦あり流との間には本質的な区別があり, 両者は互いに転換できないものであることを示している.